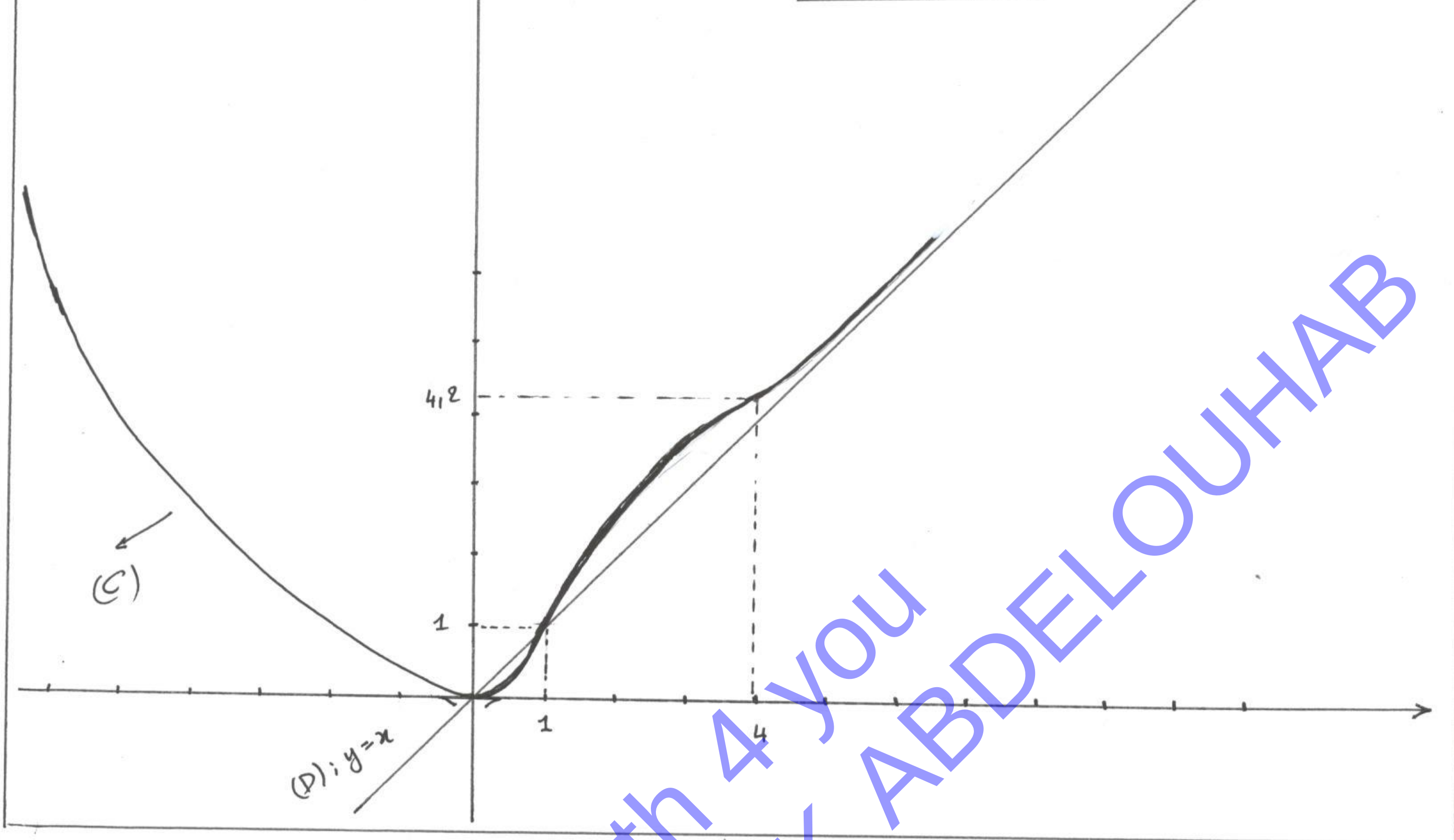
5) إنشاء (D) و (C)



6) أ- ⊙ H دالة قابلة للاشتقاق على IR لأنها
جداء دالتين قابلتين للاشتقاق معا
$x \mapsto x^2+2x+2$ القابلة للاشتقاق على IR
لكونها حدودية و الدالة $x \mapsto e^{-x}$ القابلة
للاشتقاق على IR

⊙ ولدينا:

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad H'(x) = (x^2+2x+2)'e^{-x} + (x^2+2x+2)(e^{-x})'$$
$$= (2x+2)e^{-x} + (-x)'(x^2+2x+2)e^{-x}$$
$$= (2x+2)e^{-x} - (x^2+2x+2)e^{-x}$$
$$= (\cancel{2x}+\cancel{2} - x^2 - \cancel{2x} - \cancel{2})e^{-x} = -x^2e^{-x}$$

⊙ استنتاج:

$$\int_0^1 x^2e^{-x}dx = -\int_0^1 -x^2e^{-x}dx$$
$$= -\left[H(x)\right]_0^1$$
$$= -\left[(x^2+2x+2)e^{-x}\right]_0^1$$

(suite)

$$= -\left[5e^{-1} - 2\right]$$
$$= -\frac{5}{e}+2$$
$$= \boxed{\frac{2e-5}{2}}$$

ب- نضع: $U'(x)=e^{-x}$ ، $V(x)=x$ $\Leftarrow$ $U(x)=-e^{-x}$ ، $V'(x)=1$

$$\Rightarrow \int_0^1 xe^{-x}dx = \left[-xe^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx$$
$$= -e^{-1} + \left[-e^{-x}\right]_0^1$$
$$= -e^{-1} - e^{-1} + 1$$
$$= -\frac{2}{e}+1$$
$$= \boxed{\frac{e-2}{2}}$$

ج- حساب المساحة S

لدينا:

$$S=\int_0^1 |f(x)-x|\,dx \quad cm^2$$

$$=\int_0^1 (x-f(x))\,dx \quad cm^2$$

(لأن: $f(x)-x\le 0$ على $[0,1]$

$\Rightarrow |f(x)-x| = -(f(x)-x)$

$= x-f(x)$)

$$=\int_0^1 \left(\frac{x-x^2}{e^x}\right)dx \quad cm^2$$

$$=\int_0^1 (x-x^2)e^{-x}\,dx \quad cm^2$$

$$=\int_0^1 xe^{-x}\,dx + \int_0^1 -x^2e^{-x}\,dx$$

$$=\left[\left(\frac{e-2}{2}\right)-\left(\frac{2e-5}{e}\right)\right] cm^2$$

$$=\left(\frac{e-2}{2}+\frac{5-2e}{e}\right) cm^2$$

$$=\left(\frac{e^2-2e+10-4e}{2e}\right) cm^2$$

$$=\left(\frac{e^2-6e+10}{2e}\right) cm^2$$

III -

1) استدلال بالترجع:

⊙ لدينا: $0\le U_0=\frac{1}{2}\le 1$ عبارة صحيحة

⊙ نفترض أن $0\le U_n\le 1$

لنبين أن: $0\le U_{n+1}\le 1$

لدينا:

$\begin{cases} 0\le U_n\le 1 \\ f \text{ تزايدية على } [0,1] \end{cases} \Rightarrow f(0)\le f(U_n)\le f(1)$

(تعريف التزايدية)

$\Rightarrow 0\le U_{n+1}\le 1$

(لأن: $f(0)=0$ ، $f(1)=1$)

خلاصة:

$\forall n\in\mathbb{N} \quad 0\le U_n\le 1$

⊙ ملاحظة: هذه النتيجة تبين أن (U_n) محدودة (مكبورة بـ 1 ومصغورة بـ 0)

2) لنبين أن (U_n) تناقصية

رأينا في II) أن:

$\forall x\in[0,1] \quad f(x)\le x$

$\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N} \quad f(U_n)\le U_n$

(لأن $\forall n\in\mathbb{N} \quad U_n\in[0,1]$ نتيجة 1))

$\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N} \quad U_{n+1}\le U_n$

$\Rightarrow (U_n)$ "تناقصية"

3) ⊙ (U_n) تناقصية ومصغورة بـ 0 إذن متقاربة

⊙ تحديد $\ell=\lim_{n\to+\infty} U_n$

(U_n) من نوع: $\begin{cases} U_0\in I=[0,1] \\ U_{n+1}=f(U_n) \end{cases}$

حيث f متصلة على I و $f(I)\subset I$ وهي متقاربة إذن نهايتها هي حل للمعادلة: $f(x)=x$

ولدينا: $f(x)=x \Leftrightarrow f(x)-x=0$

$\Leftrightarrow (x^2-x)e^{-x}=0$

$\Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow x(x-1)=0$

(لأن $e^{-x}>0$)

$\Leftrightarrow x=0$ أو $x=1$

⊙ لنحدد القيمة المناسبة للنهاية

لدينا: (U_n) تناقصية $\Leftarrow \forall n\in\mathbb{N} \quad U_n\le U_0=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n\le \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n=0}$

لأن $1\not\leq\frac{1}{2}$