تصحيح الامتحان الوطني دورة يونيو 2018 (شعبة العلوم الاقتصادية)

الجزء 1 — خيار فرنسية

تمرين 1

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + 5 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) Calcul de U_1 et U_2

On a : $U_1 = \frac{2}{3}U_0 + 5 = (\frac{2}{\cancel{3}} \times \cancel{3}) + 5 = 7$

$U_2 = \frac{2}{3}U_1 + 5 = (\frac{2}{3} \times 7) + 5 = \frac{29}{3}$

2) a) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$: $U_n < 15$

⊙ Vérification : $U_0 = 3 < 15$
c'est une proposition vraie.

⊙ Supposons que $U_n < 15$ et montrons que $U_{n+1} < 15$

on a : $U_n < 15 \Rightarrow \frac{2}{3}U_n < \underbrace{\frac{15 \times 2}{3}}_{10}$

$\Rightarrow \frac{2}{3}U_n + 5 < 10 + 5$

$\Rightarrow U_{n+1} < 15$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_n < 15$

b) $U_{n+1} - U_n = \frac{2}{3}U_n + 5 - U_n$

$= \frac{2U_n - 3U_n}{3} + 5$

$= -\frac{U_n}{3} + 5$

c) Vérifions que $-\frac{U_n}{3} + 5 > 0$

on a $-\frac{U_n}{3} + 5 = \frac{-U_n + 15}{3}$.

or $U_n < 15$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow 0 < 15 - U_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ $-\frac{1}{3}U_n + 5 > 0$

d) on a $U_{n+1} - U_n = -\frac{1}{3}U_n + 5$

et $-1/3\, U_n + 5 > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

donc $U_{n+1} - U_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

donc (U_n) est croissante.

⊙ (U_n) Convergente :

on a (U_n) croissante et majorée par 15 car $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_n < 15$

donc elle est convergente.

3) On pose : $V_n = U_n - 15$

a) Montrons que $V_{n+1} = \frac{2}{3}V_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

On a $V_{n+1} = U_{n+1} - 15$

$= \frac{2}{3}U_n + 5 - 15$

$= \frac{2}{3}U_n - 10$

$= \frac{2}{3}(U_n - (\frac{3}{2} \times 10))$

$= \frac{2}{3}(U_n - 15)$

$\therefore = \frac{2}{3}V_n$

Déduction : comme $V_{n+1} = \frac{2}{3}V_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

alors (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$.

b) ⊙ Calcul de V_0

$V_0 = U_0 - 15 = 3 - 15 = -12$

⊙ Montrons que :

$V_n = (-12) \times (\frac{2}{3})^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

En effet :
(V_n) géométrique donc son terme général s'écrit :

$V_n = V_0 \times q^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$= (-12) \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$

donc $V_n = (-12) \times \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

4) a) Déterminons U_n en fonction de n

on a $V_n = U_n - 15$

$\Rightarrow V_n + 15 = U_n$

$\Rightarrow (-12) \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + 15 = U_n$

b) Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

comme $-1 < \frac{2}{3} < 1$ donc

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

par conséquent: $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 15$

Ex 2

3 R 3 B 2 V → 3

tirage simultané

1) a) Montrons que : $P(A) = \frac{1}{56}$

$P(A) = \frac{Card\,A}{Card\,\Omega} = \frac{Card\,\{B, B, B\}}{C_8^3}$

$= \frac{C_3^3}{C_8^3} = \frac{1}{56}$

donc $P(A) = \frac{1}{56}$

b) Calcul de $P(B)$ et $P(C)$

$P(B) = \frac{Card\,B}{C_8^3} = \frac{Card\,\{R, B, V\}}{C_8^3}$

$= \frac{C_3^1 \times C_3^1 \times C_2^1}{56} = \frac{18}{56} = \frac{9}{28}$

donc $P(B) = \frac{9}{28}$

$P(C) = \frac{Card\,C}{C_8^3} = \frac{Card\,\{\bar{B}, \bar{B}, \bar{B}\}}{C_8^3}$

($\bar{B}$ càd : n'est pas blanche)

$= \frac{C_5^3}{C_8^3} = \frac{5}{28}$

donc $P(C) = \frac{5}{28}$

2) • Déterminons d'abord les valeurs de X :

Les résultats possibles	Valeurs de X correspondantes
$\{\bar{B}, \bar{B}, \bar{B}\}$	0
$\{B, \bar{B}, \bar{B}\}$	1
$\{B, B, \bar{B}\}$	2
$\{B, B, B\}$	3

donc les valeurs de X sont :

$0 \,;\, 1 \,;\, 2 \,;\, 3$

Loi de probabilité de X :

- $P(X=0) = P(C) = \frac{5}{28}$
- $P(X=1) = \frac{C_3^1 \times C_5^2}{56} = \frac{15}{28}$
- $P(X=2) = \frac{C_3^2 \times C_5^1}{56} = \frac{15}{56}$
- $P(X=3) = P(A) = \frac{1}{56}$

Vérification du résultat :

$P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = \frac{56}{56} = 1$

Ce qui prouve que notre résultat est vrai. résumons ces résultats dans le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{5}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$

b) Calcul de $E(X)$

$$E(X) = x_1 P(X=x_1) + x_2 P(X=x_2) + x_3 P(X=x_3) + x_4 P(X=x_4)$$

$$= \left(0 \times \frac{5}{28}\right) + \left(1 \times \frac{15}{28}\right) + \left(2 \times \frac{15}{56}\right) + \left(3 \times \frac{1}{56}\right)$$

$$= \frac{15}{28} + \frac{15}{28} + \frac{3}{56}$$

$$= \frac{60+3}{56}$$

$$= \frac{63}{56} \Rightarrow E(X) = \frac{63}{56}$$

Votre chaine de Soutien pédagogique des mathématiques free math 4 you Vous souhaite de Très Bon résultats à l'examen Inchaa llah

N'oublier pas de soutenir la chaine Comme elle Vous Soutienne en s'abonnant et n'oublier pas d'activer la petite Clochette pour qu'il vous parvienne les nouveautés de la chaine et Merci infiniment.

Soyez au rendez-vous pour Part 2