خيار فرنسية

تصحيح الامتحان الوطني دورة يونيو 2018 (الجزء 2) (علوم اقتصادية)

Problème

$$\begin{cases} f(x) = x - \frac{1}{x} + \ln x \\ x > 0 \end{cases}$$

Partie I :

1) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x}\left(x^2 - 1 + x\ln x\right)$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{1}{x}}_{+\infty} \times \left[\underbrace{\lim\limits_{x \to 0^+}(x^2-1)}_{(-1)} + \underbrace{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x}_{0}\right]$

$= -\infty$

car $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

Interprétation géométrique :

la droite d'équation Cartésienne $x = 0$ $((Oy))$ est une asymptote à (C) à droite.

2) a) Calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x - \frac{1}{x} + \ln x\right)$

$= \lim\limits_{+\infty} x - \underbrace{\lim\limits_{+\infty}\frac{1}{x}}_{0} + \lim\limits_{+\infty}\ln x$

$= +\infty$

car $\lim\limits_{+\infty}\frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{+\infty}\ln x = +\infty$

b) Montrons que : $\lim\limits_{+\infty}\frac{f(x)}{x} = 1$

on a : $\frac{f(x)}{x} = \frac{x - 1/x + \ln x}{x}$

$= 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{\ln x}{x}$

donc $\lim\limits_{+\infty}\frac{f(x)}{x} = 1 - \lim\limits_{+\infty}\frac{1}{x^2} + \lim\limits_{+\infty}\frac{\ln x}{x}$

$= 1 + 0$

$= 1$

car $\lim\limits_{+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = 1$

c) Calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - x)$

on a $(f(x) - x) = -\frac{1}{x} + \ln x$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x) = \lim\limits_{+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) + \lim\limits_{+\infty}\ln x$

$= +\infty$

Interprétation géométrique :

(C) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation Cartésienne : $y = x$ au voisinage de $(+\infty)$.

3) a) Montrons que : $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$

On a $x > 0$ $f'(x) = x' - \left(\frac{1}{x}\right)' + (\ln x)'$

$= 1 - \left(\frac{-x'}{x^2}\right) + \frac{1}{x}$

$= 1 - \left(\frac{-1}{x^2}\right) + \frac{1}{x}$

$= 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$

donc $\forall x > 0 \quad f'(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$

b) ⊙ Calcul de $f(1)$:

$f(1) = 1 - \frac{1}{1} + \underbrace{\ln 1}_{0} = 1 - 1 = 0$

donc $f(1) = 0$

⊙ Tableau de variation de f :

⊙ signe de $f'(x)$ sur $]0, +\infty[$

$x > 0 \Rightarrow 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$

$\Rightarrow f'(x) > 0$

donc f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ d'où le tableau de variation :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

c) Déduisons le signe de $f(x)$ sur $]0,1]$ et sur $[1,+\infty[$

⊙ sur $]0,1]$

on a $x \in]0,1] \Rightarrow x \leq 1$

$\Rightarrow f(x) \leq f(1) = 0$

(car f est croissante)

$\Rightarrow f(x) \leq 0$

⊙ sur $[1,+\infty[$

on a $x \in [1,+\infty[\Rightarrow x \geq 1$

$\Rightarrow f(x) \geq f(1) = 0$

$\Rightarrow f(x) \geq 0$

Résumé

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

d) Équation de la tangente (T)

$$(T) : y = f'(1)(x-1) + \underbrace{f(1)}_{0}$$

$$= 3(x-1)$$

$$\Rightarrow (T) : y = 3x - 3$$

4) a) Mq : $\int_1^e \ln x \, dx = 1$

On pose : $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \ln x \end{cases}$ donc $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_1^e \ln x \, dx = \left[x \ln x\right]_1^e - \int_1^e x \times \frac{1}{x} \, dx$$

$$= e \underbrace{\ln e}_{1} - 1 \underbrace{\ln 1}_{0} - \int_1^e 1 \, dx$$

$$= e - \left[x\right]_1^e$$

$$= e - (e-1)$$

$$= 1$$

$$\Rightarrow \int_1^e \ln x \, dx = 1$$

b) Soit S l'aire de la partie hachurée.

Montrons que $S = \frac{1}{2}(e^2 - 1)$ u.a

on a grâce au cours :

$$S = \left(\int_1^e |f(x)| \, dx\right) \text{u.a}$$

or sur $[1,e]$ on a $f(x) \geq 0$

(voir 3) c))

$$\Rightarrow |f(x)| = f(x)$$

donc $S = \int_1^e f(x) dx$ u.a

$$= \int_1^e \left(x - \frac{1}{x} + \ln x\right) dx \text{ u.a}$$

$$= \left[\int_1^e \left(x - \frac{1}{x}\right) dx + \underbrace{\int_1^e \ln x \, dx}_{1}\right] \text{u.a}$$

$$= \left[\left[\frac{x^2}{2} - \ln x\right]_1^e + 1\right] \text{u.a}$$

$$= \left(\frac{e^2}{2} - \underbrace{\ln e}_{1} - \frac{1}{2} + 1\right) \text{u.a}$$

$$= \left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\right) \text{u.a}$$

$$= \left(\frac{e^2 - 1}{2}\right) \text{u.a}$$

donc $S = \frac{1}{2}(e^2 - 1)$ u.a

Partie II

$$g(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-1+2\ln x)$$

1) Montrons que : $\forall x>0 \quad g'(x) = f(x)$

En effet :

on a $g'(x) = \frac{1}{2}\left[(x-1)'(x-1+2\ln x) + (x-1)(x-1+2\ln x)'\right]$

$= \frac{1}{2}\left[x-1+2\ln x + (x-1)\left(1+\frac{2}{x}\right)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[x-\cancel{1}+2\ln x + x + \cancel{2} - \cancel{1} - \frac{2}{x}\right]$

$= \frac{1}{2}\left(2x + 2\ln x - \frac{2}{x}\right)$

$= \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}\left(x + \ln x - \frac{1}{x}\right)$

$= f(x).$

2) Monotonie de g sur $]0,1]$ et sur $[1,+\infty[$

⊙ signe de $g'(x)$

le signe de $g'(x)$ est celui de $f(x)$ et grâce à I) 3) c)

on a :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

donc g est décroissante sur $]0,1]$ et croissante sur $[1,+\infty[$.

3) a) g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et de plus vérifie : $g'(x) = f(x) \quad \forall x>0$

donc g est une primitive de f sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

b) on a $\int_1^e f(x)\,dx = [g(x)]_1^e$

(car g est une primitive de f sur $]0,+\infty[$)

$\Rightarrow \frac{1}{2}(e^2-1) = g(e) - g(1)$

car $\int_1^e f(x)\,dx = \frac{1}{2}(e^2-1)$

(voir 4) b)).

donc $\boxed{g(e) - g(1) = \frac{1}{2}(e^2-1)}$

votre chaine preferée :

free math 4 you vous souhaite d'excellents Résultats au Bac inchallah.

N'oublier pas de s'abonner svp et activez svp la petite clochette pour avoir des nouveautés de la chaine et Merci infiniment.