## الجزء II

1) أ- لنبين أن $f$ متصلة في $0$ على اليمين

لدينا: $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{x+1}{x}\right)\ln(x+1)$

$= \lim\limits_{x\to0^+}(x+1)\times\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{\ln(x+1)}{x}\right)$

$= 1\times1$

$= 1$

$= f(0) \Rightarrow$ $f$ متصلة في $0$ على اليمين

ب- لنبين أن $f$ قابلة للاشتقاق في $0$ على اليمين

لدينا: $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-1}{x}$

$= \lim\limits_{x\to0^+}\frac{\left(\frac{x+1}{x}\right)\ln(x+1)-1}{x}$

$= \lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{(x+1)\ln(x+1)-x}{x^2}\right)$

$= \lim\limits_{x\to0^+}\left[\frac{x\ln(x+1)}{x^2}+\frac{\ln(x+1)-x}{x^2}\right]$

$= \lim\limits_{x\to0^+}\left[\frac{\ln(x+1)}{x}-\left(\frac{x-\ln(x+1)}{x^2}\right)\right]$

$= \lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(x+1)}{x}-\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{x-\ln(x+1)}{x^2}\right)$

$= 1-\frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}$ ((نعطي I) 2))

$\Rightarrow$ $f$ قابلة للاشتقاق في $0$ على اليمين

ولدينا: $\boxed{f'_d(0)=\frac{1}{2}}$

ج) ⊙ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)\times\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x+1)$

$= 1\times(+\infty)$

$= +\infty$

⊙ حساب: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

$\frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{(x+1)\ln(x+1)}{x}}{x} = \frac{(x+1)}{x^2}\ln(x+1)$

$= \frac{(x+1)^2}{x^2}\,\overbrace{\frac{\ln(x+1)}{(x+1)}}^{X}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^2}{x^2}\times\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{(x+1)}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}\times\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{\ln X}{X}$

$= 1\times0$

$= 0$

⊙ التأويل المبياني

$(C)$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $(+\infty)$.

2) أ- الدالة: $f_1: x\longmapsto\ln(x+1)$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ لأنها مركب دالتين قابلتين للاشتقاق ($x\longmapsto\ln x$ و $x\longmapsto x+1$)

و الدالة $f_2: x\longmapsto\frac{x+1}{x}$ جذرية إذن قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

ومنه فإن $f$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ لأنها جداء الدالتين القابلتين للاشتقاق $f_1$ و $f_2$.

⊙ حساب $f'(x)$:

$\forall x>0\quad f'(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right)'\ln(x+1)+\left(\frac{x+1}{x}\right)\left(\ln(x+1)\right)'$

$= \frac{\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}}{x^2}\ln(x+1)+\left(\frac{x+1}{x}\right)\left(\frac{1}{x+1}\right)$

$= \frac{-1}{x^2}\ln(x+1)+\frac{1}{x}$

$= \frac{x-\ln(x+1)}{x^2}$

ب- إشارة $f'(x)$ على $]0,+\infty[$

نعطي I) 2) لدينا: $\frac{1}{2(x+1)} \leq f'(x)$

وبما أن $\frac{1}{2(x+1)}>0$ فإن $f'(x)>0$

$\Rightarrow$ $f$ تزايدية قطعا على $\mathbb{R}^+$

ج- $f([0,+\infty[) = [f(0), \lim_{x\to+\infty} f(x)[$

$= [1,+\infty[$

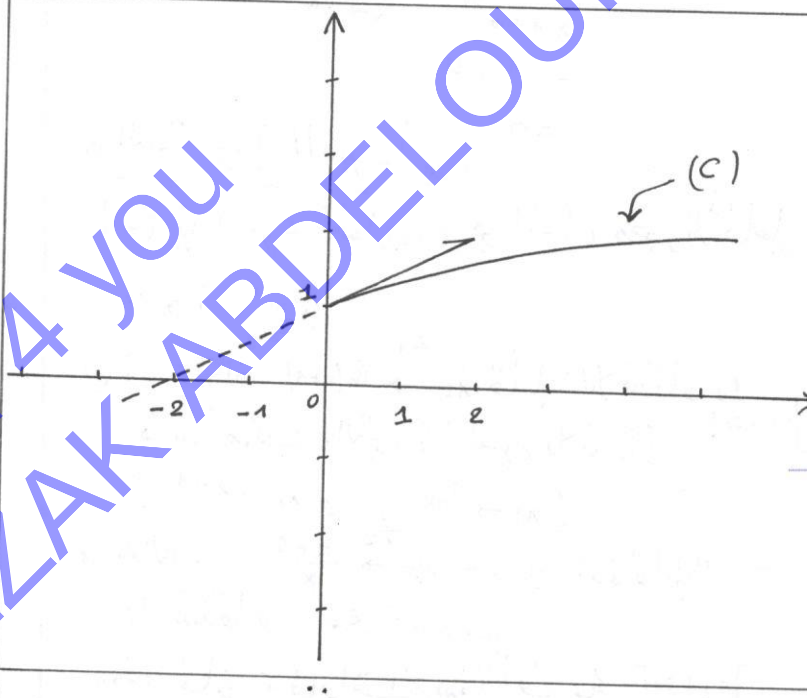
لأن f متصلة و متزايدة على $[0,+\infty[$.

3) إنشاء (C)

⊙ معادلة نصف المماس لـ (C) على يمين $A(0,1)$

$(\Delta): y = f'_d(0)(x-0)+f(0)$

$= \frac{1}{2}x + 1$




⊙ الجزء III

1) أ- دينا (I) 2) لدينا: $0 < \frac{1}{2(1+x)} \le \frac{x-\ln(1+x)}{x^2} \le \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad 0 \le f'(x) \le \frac{1}{2} \quad \forall x>0$

ب- لدينا: $\forall x>0 \quad g'(x) = f'(x) - (x)'$

$= f'(x) - 1 < 0$

لأن: $\forall x>0 \quad f'(x) \le \frac{1}{2} < 1$

$\Rightarrow \quad \forall x>0 \quad f'(x) < 1$

إذن g تناقصية قطعا على $]0,+\infty[$.

⊙ $g(]0,+\infty[) = ]\lim_{x\to+\infty} g(x), \lim_{x\to 0^+} g(x)[$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{f(x)}{x} - 1\right)$

$= \lim_{x\to+\infty} x\left(\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}}_{0} - 1\right)$

$= -\infty$

إذن: $g(]0,+\infty[) = ]-\infty, 1[$

( لأن: $\lim_{x\to0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) - 0 = 1$ )

ج- g متصلة و تناقصية قطعا على $]0,+\infty[$

إذن g تقابل من $]0,+\infty[$ نحو $]-\infty,1[$

و بما أن $0\in]-\infty,1[$ إذن له سابق وحيد $\alpha$ في المجال $]0,+\infty[$

$\Rightarrow \exists! \alpha \in ]0,+\infty[ \ : \ g(\alpha)=0$

$\Leftrightarrow \exists! \alpha>0 \ : \ f(\alpha)=\alpha$

2) $a>0$

$$\begin{cases} U_0 = a \\ U_{n+1} = f(U_n) \quad \forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

أ- نستدل بالترجع:

⊙ لدينا: $U_0 = a > 0$ (عبارة صحيحة)

⊙ نفترض أن $U_n>0$

⊙ لنبين أن: $U_{n+1}>0$

لدينا: $U_n>0 \Rightarrow f(U_n) > f(0)$

(لأن f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}^+$)

$\Rightarrow U_{n+1} > 1 > 0$

$\Rightarrow U_{n+1} > 0$

إذن: $\forall n\in\mathbb{N} \quad U_n > 0$

ب- لدينا $|f'(x)| \le \frac{1}{2}$ و $\begin{cases} U_{n+1}=f(U_n) \\ \alpha=f(\alpha) \end{cases}$

إذن نطبق مبرهنة التزايدات المنتهية

فإن: $|U_{n+1}-\alpha| = |f(U_n)-f(\alpha)| \le \frac{1}{2}|U_n-\alpha|$

$\forall n\in\mathbb{N}$

ج- $|U_n-\alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^0 |a-\alpha|$ عبارة صحيحة

نفترض أن: $|U_n - \alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n|a-\alpha|$

لنبين أن: $|U_{n+1}-\alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}|a-\alpha|$

لدينا: $|U_{n+1}-\alpha| \le \frac{1}{2}|U_n-\alpha|$ (1) (نعمل ب)

و $|U_n-\alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n|a-\alpha|$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن:

$$|U_{n+1}-\alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n|a-\alpha| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}|a-\alpha|$$

ومنه فإن:

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad |U_n-\alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n|a-\alpha|$$

د) لدينا: $-1<\frac{1}{2}<1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n|a-\alpha|=0$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n=\alpha$

نعمل مصاديق تقارب متتالية

## التمرين 5

1) F متصلة وتزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

الدالة: $t\mapsto e^{t^2}$ متصلة على $\mathbb{R}$ إذن

تقبل دالة أصلية على الأقل على $\mathbb{R}$

لتكن $F_1$ دالة أصلية لـ $t\mapsto e^{t^2}$ على $\mathbb{R}$

إذن: $\forall x\in\mathbb{R}\quad F(x)=[F_1(t)]_0^x$

$= F_1(x)-F_1(0)$

إذن F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

لأن $F_1$ دالة أصلية لـ $t\mapsto e^{t^2}$ على $\mathbb{R}$

إذن قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

والدالة الثابتة: $x\mapsto -F_1(0)$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

ومنه فإن F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ F متصلة على $\mathbb{R}$

لأن: (f قابلة للاشتقاق على مجال I $\Rightarrow$ f متصلة على I)

⊙ حساب $F'(x)$

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad F'(x)=F_1'(x)+\underbrace{(-F_1(0))'}_{0}$$

$= e^{x^2}$ (لأن $F_1$ دالة أصلية لـ $t\mapsto e^{t^2}$ على $\mathbb{R}$)

$\Rightarrow \forall x\in\mathbb{R}\quad F'(x)=e^{x^2}>0$

$\Rightarrow$ F تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

2) أ- لنبين أن: $\forall x>0\quad F(x)\ge x$

$t\in[0,x] \Rightarrow t\ge 0$

$\Rightarrow t^2\ge 0$

$\Rightarrow e^{t^2}\ge e^0=1$

(لأن: $t\mapsto e^t$ تزايدية على $\mathbb{R}$)

$\Rightarrow \int_0^x e^{t^2}dt \ge \int_0^x dt \quad \forall x\in\mathbb{R}^{*}_{+}$

$\Rightarrow \forall x>0\quad F(x)\ge x$

⊙ استنتاج

$\lim_{+\infty} x=+\infty$

و $\forall x>0\quad F(x)\ge x$

$\Rightarrow \lim_{+\infty} F(x)=+\infty$

ب- F فردية

⊙ $\forall x\in\mathbb{R}: (-x)\in\mathbb{R}=D_F$

⊙ $F(-x)=\int_0^{-x} e^{t^2}dt$

نضع $u=-t$

$$\Rightarrow \begin{cases} du=-dt \\ \begin{cases} t=-x \\ t=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u=x \\ u=0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow F(-x) = \int_0^{x} e^{(-u)^2}(-du)$$
$$= -\int_0^{x} e^{u^2}du$$
$$= -F(x)$$
إذن $F$ دالة فردية.

(•) استنتاج

$$\lim_{-\infty} F(x) = ?$$

نضع $X = -x$

$$\Leftrightarrow -X = x$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{X\to+\infty} F(-X)$$
$$= -\lim_{X\to+\infty} F(X) \quad \text{(لأن } F \text{ فردية)}$$
$$= -(+\infty)$$
$$= -\infty$$

ج- $F$ مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

إذن $F$ تقابل من $\mathbb{R}$ نحو المجال

$$J = F(]-\infty,+\infty[)$$
$$= ]\lim_{-\infty} F(x), \lim_{+\infty} F(x)[$$
$$= ]-\infty,+\infty[$$
$$= \mathbb{R}.$$

-> نضع: $G = F^{-1}$

(•) $G$ قابلة للاشتقاق في $0$

(•) حساب $F^{-1}(0)$

لدينا: $F(0) = \int_0^0 e^{t^2}dt = 0$

(لأن $\int_a^a f(t)dt = 0$)

$$F(0) = 0 \Leftrightarrow 0 = F^{-1}(0)$$

لدينا: $F$ قابلة للاشتقاق في $0$

و $F'(0) = e^0 = 1 > 0$ إذن $F^{-1}$ قابلة للاشتقاق في $0$ ولدينا $F(0)=0$:

$$(F^{-1})'(F(0)) = \frac{1}{F'(0)}$$
$$= \frac{1}{1}$$
$$= 1.$$

$$\Rightarrow G'(0) = 1$$

متمنياتنا لكم بالتوفيق والنجاح إن شاء الله

لا تنسونا من دعواتكم

كما لا تنسوا الاشتراك في قناتكم free math 4 you لتستمر مسيرة العطاء والدعم.

وقوموا بتفعيل الجرس ليصلكم كل ما هو مفيد وجديد

وجزاكم الله خيرا.