تصحيح الامتحان الوطني علوم رياضية (دورة يونيو 2018) (الجزء 2)

التمرين ③ : $m \in \mathbb{C}$

I - 1 - أ)

$$\Delta = (2+im)^2 - 4(1)(im+2-m)$$
$$= 4 - m^2 + \cancel{4im} - \cancel{4im} - 8 + 4m$$
$$= -m^2 + 4m - 4$$
$$= (im)^2 + 4m + (2i)^2$$
$$= (im)^2 - 2(im)(2i) + (2i)^2$$
$$= (im - 2i)^2$$

ب - حلول (E_m) حسب m

⊙ نميز حالتين:

1) إذا كان $im - 2i = 0$ وهذا يكافئ $m = 2$

في هذه الحالة يكون لدينا $\Delta = 0$

ومنه فإن لـ (E_m) حلا وحيدا هو:

$$Z = \frac{-(2+im)}{2}$$

$$\Rightarrow S = \left\{ -\frac{1}{2}(2+im) \right\}$$

2) إذا كان $m \neq 2$ فإن $\Delta \neq 0$

ومنه فإن لـ (E_m) حلين عقديين مختلفين هما:

$$Z_1 = \frac{-(2+im) + (im - 2i)}{2}$$

(لأن: $d = im - 2i$ جذرا مربعا لـ Δ)

$$= \frac{-2 - \cancel{im} + \cancel{im} - 2i}{2}$$
$$= \frac{-\cancel{2}(1+i)}{\cancel{2}}$$
$$= -(1+i) \Rightarrow Z_1 = -(1+i)$$

و

$$Z_2 = \frac{-(2+im) - (im - 2i)}{2}$$
$$= \frac{-2 - im - im + 2i}{2}$$
$$= \frac{-2 - 2im + 2i}{2}$$
$$= \frac{-\cancel{2}(1 + im - i)}{\cancel{2}}$$
$$= -(1 + im - i)$$
$$\Rightarrow Z_2 = -1 + i - im$$

ومنه فإن:

$$S = \{ -(1+i), (-1+i-im) \}$$

2) نأخذ: $m = i\sqrt{2}$

في هذه الحالة لدينا:

$$\begin{cases} Z_1 = -(1+i) \\ Z_2 = -1 + i + \sqrt{2} \end{cases}$$

⊙ كتابة Z_1 على شكل الأسي

لدينا:

$$Z_1 = (-1)(1+i)$$
$$= [1, \pi][\sqrt{2}, \pi/4]$$

(لأن: $\forall a<0 \quad a = [-a, \pi]$

و $1+i = [\sqrt{2}, \pi/4]$)

$$= [\sqrt{2}, \pi + \frac{\pi}{4}]$$
$$= [\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}]$$
$$\Rightarrow Z_1 = \sqrt{2}\, e^{\frac{5i\pi}{4}}$$

⊙ كتابة Z_2 على شكله الأسي

لدينا: $Z_2 = -1+i+\sqrt{2}$

$= -(1-i)+\sqrt{2}$

$=(-1)(\overline{1+i})+\sqrt{2}$

$=[1,\pi]\,[\overline{\sqrt{2},\frac{\pi}{4}}]+\sqrt{2}$

$=[1,\pi]\,[\sqrt{2},-\frac{\pi}{4}]+\sqrt{2}$

$=[\sqrt{2},\pi-\frac{\pi}{4}]+\sqrt{2}$

$=[\sqrt{2},\frac{3\pi}{4}]+\sqrt{2}$

$=\sqrt{2}\,e^{\frac{3i\pi}{4}}+\sqrt{2}$

$=\sqrt{2}\left(1+e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)$

$=\sqrt{2}\,e^{\frac{3i\pi}{8}}\left(\underbrace{e^{\frac{3i\pi}{8}}+e^{-\frac{3i\pi}{8}}}_{2\cos\frac{3\pi}{8}}\right)$

$=2\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{8}\,e^{\frac{3i\pi}{8}}$

⊙ إشارة: $\cos\frac{3\pi}{8}$

$\cos\frac{3\pi}{8}>0 \Leftarrow 0<\frac{3\pi}{8}<\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow Z_2 = 2\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{8}\,e^{\frac{3i\pi}{8}}$

II - 1) أ- لنتحقق من أن مركز R هو $\Omega(i)$

لنكن $\Omega'(w')$ حيث $w'\in\mathbb{C}$

مركز R لنبين أن $\Omega(i)=\Omega'(w')$

نفضل الكتابة العقدية للدوران R لدينا:

$m'-w'=(m-w')e^{-i\pi/2}$

$\Leftrightarrow m'-w'=(m-w')(-i)$

$\Leftrightarrow m'-w'=-im+iw'$

$\Leftrightarrow m'+im=w'+iw'$

$\Leftrightarrow -i\cancel{m}-1+i+i\cancel{m}=(1+i)w'$

$\Leftrightarrow \frac{-1+i}{1+i}=w'$

$\Leftrightarrow \frac{-(1-i)^2}{2}=w'$

$\Leftrightarrow \frac{-(-2i)}{2}=w'$

$\Leftrightarrow i=w'$

إذن

$\Omega'=\Omega$

ومنه فإن مركز الدوران R هو $\Omega(i)$

ب- لنحدد b لحق B

لدينا: $A=R(B)$

نفضل الكتابة العقدية للدوران R لدينا:

$a-i=(b-i)(-i)$

$\Leftrightarrow a-i=-ib-1$

$\Leftrightarrow 1-i+a=-ib$

$\Leftrightarrow (1-i+a)i=-i^2b$

$\Leftrightarrow i+1+ia=b$

$\Leftrightarrow i+1+i(-1-i)=b$

$\Leftrightarrow \cancel{i}+1-\cancel{i}+1=b$

$\Leftrightarrow 2=b$

2) أ- لنتحقق من أن:

$\left(\frac{w-a}{w-b}\right)(m-b)=m'-a$

لدينا: $\left(\frac{w-a}{w-b}\right)(m-b)=\left(\frac{i+1+i}{i-2}\right)(m-2)$

$=\frac{(1+2i)(-2-i)}{5}(m-2)$

$=\frac{(-\cancel{2}-i-4i+\cancel{2})}{5}(m-2)$

$=-i(m-2)$

$=2i-im \qquad (1)$

ولدينا: $m'-a=-im-\cancel{1}+i+\cancel{1}+i$

$=2i-im \qquad (2)$

من (1) و (2) نستنتج أن:

$$\boxed{m'-a=\left(\frac{w-a}{w-b}\right)(m-b)}$$

ب-

A وM وM' متداورة $\Leftrightarrow \left(\frac{m'-a}{m-a}\right)\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{w-a}{w-b}\right)\left(\frac{m-b}{m-a}\right)\in\mathbb{R}$$

(نفس أ)

$\Leftrightarrow$ النقط A وB و Ω و M متداورة

(خاصية رأيناها في الدرس)

ج- نضع:

$(\mathcal{C})=\{M\in P\,/\,$ A وM وM' مستقيمية $\}$.

$M\in(\mathcal{C})\Leftrightarrow$ A وM وM' مستقيمية

$\Leftrightarrow$ A وB و Ω و M متداورة

(نفس السؤال السابق)

وبما أن $A=R(B)$ فإن

$$\overline{(\overrightarrow{\Omega B},\overrightarrow{\Omega A})}\equiv\frac{-\pi}{2}\,[2\pi]$$

إذن A وB و Ω تنتمي لنفس الدائرة

والزاوية $\hat{\Omega}$ قائمة إذن $[AB]$ أحد أقطار هذه الدائرة ومنه فإن مركزها هو:

Ω_1 منتصف $[AB]$, وشعاعها هو $R=\frac{AB}{2}$

$$\Rightarrow \Omega_1\left(\frac{a+b}{2}\right),\ R=\frac{|a-b|}{2}$$

$$\Rightarrow \Omega_1\left(\frac{-1-i+2}{2}\right),\ R=\frac{|-1-i-2|}{2}$$

$$\Rightarrow \Omega_1\left(\frac{1-i}{2}\right) \text{ و } R=\frac{|-3-i|}{2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

خلاصة:

$$\boxed{(\mathcal{C})=\mathcal{C}\left(\Omega_1\left(\frac{1-i}{2}\right),\frac{\sqrt{10}}{2}\right)}$$

التمرين 4

الجزء I :

1) أ- لدينا:

$$\int_0^x \frac{t}{1+t}\,dt=\int_0^x\left(\frac{t+1-1}{1+t}\right)dt$$

$$=\int_0^x\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$=\int_0^x\left(1-\frac{(1+t)'}{1+t}\right)dt$$

$$=\Big[t-\ln|\underbrace{1+t}_{>0}|\Big]_0^x$$

(لأن: $(t\in[0,x],\ x>0\Rightarrow t\geq 0$
$\Rightarrow 1+t>0)$

$$=\big[t-\ln(1+t)\big]_0^x$$

$$=x-\ln(1+x)$$

ب- نضع: $u=t^2$

$$\Rightarrow\begin{cases} du=2t\,dt \\ \sqrt{u}=|t|=t \quad (\text{لأن: } t\geq 0) \\ \begin{cases}t=0\\ t=x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u=0\\ u=x^2\end{cases}\end{cases}$$

ومنه فإن:

$$\int_0^x\frac{t}{1+t}\,dt=\int_0^{x^2}\left(\frac{1}{1+t}\right)(t\,dt)$$

$$=\int_0^{x^2}\frac{1}{1+\sqrt{u}}\left(\frac{1}{2}du\right)$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{x^2}\frac{1}{1+\sqrt{u}}\,du$$

(نفس خطّية التكامل)

ج- استنتاج: يكفي تأطير العدد $\frac{1}{1+\sqrt{u}}$

لدينا: $1+\sqrt{u}\geq 1$ (لأن $u\geq 0$)

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{1+\sqrt{u}}\leq 1} \quad (1)$$

من جهة أخرى لدينا:

$u\leq x^2\Rightarrow\sqrt{u}\leq\sqrt{x^2}=x$ (لأن $x>0$)

$$\Rightarrow 1+\sqrt{u}\leq 1+x$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{x+1}\leq\frac{1}{1+\sqrt{u}}} \quad (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن :

$$\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{1+\sqrt{u}} \leq 1$$

$$\Rightarrow \int_0^{x^2} \left(\frac{1}{x+1}\right) du \leq \int_0^{x^2} \frac{1}{1+\sqrt{u}} du \leq \int_0^{x^2} du$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{x+1} \leq 2\int_0^{x} \frac{t}{1+t} dt \leq x^2$$

(نفس السؤال ب)

$$\Rightarrow \frac{x^2}{x+1} \leq 2\left(x-\ln(x+1)\right) \leq x^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2(x+1)} \leq \frac{x-\ln(x+1)}{x^2} \leq \frac{1}{2} \quad \forall x>0$$

2) لنحدد $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$

بما أن $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{2(x+1)} = \frac{1}{2}$

فإن $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{x-\ln(x+1)}{x^2}\right) = \frac{1}{2}$

لأن $x \mapsto \frac{x-\ln(x+1)}{x^2}$ محصورة

بين دالتين لهما نفس النهاية $\frac{1}{2}$

(خاصية أساسية في فقرة "النهاية والترتيب")

حظ بالتوفيق إن شاء الله

لا تحرمونا من دعواتكم

و الاشتراك في القناة لتشجيعنا

و دعمنا لدعمكم و مساعدتكم

و لنستفيد من كل ما هو مفيد وجديد

قم بتفعيل الجرس و شكرا جزيلا .