الموضـوع

التمرين الأول (3 ن)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ، النقط $A(-1,0,3)$ و $B(3,0,0)$ و $C(7,1,-3)$ والفلكة (S) التي معادلتها : $x^2+y^2+z^2-6x-2y-15=0$.

1 | 1) بين أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=3\vec{i}+4\vec{k}$ واستنتج أن $3x+4z-9=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

0.5 | 2) بين أن مركز الفلكة (S) هي النقطة $\Omega(3,1,0)$ وأن شعاعها هو 5 .

3) ليكن (Δ) المستقيم المار من النقطة Ω والعمودي على المستوى (ABC) .

0.5 | أ - بين أن : $\begin{cases} x=3+3t \\ y=1 \\ z=4t \end{cases} \quad (t\in I\!R)$ هو تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) .

1 | ب - بين أن المستقيم (Δ) يقطع الفلكة (S) في النقطتين $E(6,1,4)$ و $F(0,1,-4)$.

التمرين الثاني (3 ن)

1 | 1) حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-6z+10=0$.

2) نعتبر في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$ ، النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي : $a=3-i$ و $b=3+i$ و $c=7-3i$.

ليكن z لحق نقطة M من المستوى و z' لحق النقطة M' صورة M بالدوران R الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

0.5 | أ - بين أن : $z'=iz+2-4i$.

0.25 | ب - تحقق من أن لحق النقطة C' صورة النقطة C بالدوران R هو $c'=5+3i$.

1.25 | ج - بين أن : $\frac{c'-b}{c-b}=\frac{1}{2}i$ ثم استنتج أن المثلث BCC' قائم الزاوية في B و أن $BC=2BC'$.

التمرين الثالث (3 ن)

يحتوي صندوق على خمس كرات بيضاء وثلاث كرات حمراء وكرتين سوداوين (لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس) .
نسحب عشوائيا وفي آن واحد أربع كرات من الصندوق .

1 | 1) نعتبر الحدثين التاليين :
A : " الحصول على كرة حمراء واحدة فقط " و B : " الحصول على كرة بيضاء على الأقل " .
بين أن $P(A)=\frac{1}{2}$ و $P(B)=\frac{41}{42}$.

2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات الحمراء المسحوبة .

0.25 | أ - تحقق من أن القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X هي 0 و 1 و 2 و 3 .

1 | ب - بين أن $P(X=2)=\frac{3}{10}$ و $P(X=0)=\frac{1}{6}$.

0.75 | ج - حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X .

التمرين الرابع (3 ن)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 1}{2u_n}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

1) بين بالترجع أن : $u_n - 1 > 0$ لكل n من $\mathbb{N}$. 0.75

2) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة بما يلي : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{2u_n - 1}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

أ – بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{2}$ واستنتج أن $v_n = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$. 1

ب – بين أن $u_n = \dfrac{v_n - 1}{2v_n - 1}$ ثم استنتج أن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$. 0.75

3) احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n$ حيث (w_n) هي المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $w_n = \ln(u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$. 0.5

التمرين الخامس (8 ن)

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x) = 1 + 4xe^{2x}$.

1) بين أن : $g'(x) = 4(2x+1)e^{2x}$ لكل x من $\mathbb{R}$. 0.5

2) بين أن الدالة g تزايدية على المجال $\left[-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$ وتناقصية على المجال $\left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right]$. 0.5

3) أ– بين أن $g\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 1 - \dfrac{2}{e}$ ثم تحقق من أن $g\left(-\dfrac{1}{2}\right) > 0$. 0.5

ب – استنتج أن : $g(x) > 0$ لكل x من $\mathbb{R}$. 0.25

II) لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = (2x-1)e^{2x} + x + 1$.

وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ $\left(\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm\right)$.

1) احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ثم بين أن $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ (نذكر أن : $\lim\limits_{u \to -\infty} ue^u = 0$) . 1

2) بين أن : $f'(x) = g(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم استنتج أن الدالة f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$. 0.75

3) أ – احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ واستنتج أن (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب . 0.75

ب – احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - (x+1)\right]$ واستنتج أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x+1$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $-\infty$. 0.5

ج – حدد زوج إحداثيتي نقطة تقاطع المستقيم (Δ) والمنحنى (C) ثم بين أن المنحنى (C) يوجد تحت المستقيم (Δ) على المجال $\left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right[$ و فوق المستقيم (Δ) على المجال $\left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$. 0.5

4) أ – بين أن $y = x$ هي معادلة للمستقيم (T) مماس المنحنى (C) في النقطة O . 0.25

ب – بين أن للمنحنى (C) نقطة انعطاف أفصولها $-\dfrac{1}{2}$ (تحديد أرتوب نقطة الانعطاف غير مطلوب) . 0.25

5) أنشئ المستقيمين (Δ) و (T) والمنحنى (C) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$. 0.75

6) أ – باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن : $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)e^{2x}\,dx = 1 - \dfrac{e}{2}$. 1

ب – بين أن مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و المستقيم (T) المماس للمنحنى (C) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 0$ و $x = \dfrac{1}{2}$ هي $(6 - 2e)\,cm^2$. 0.5