(تابع)

⊙ (U_n) محصورة ومتناقصة إذن متقاربة.

⊙ بين أن: $\leq U_n \leq \frac{e}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

واستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

يجب استحضار تقنيات ومهارات فقرة "التكامل والترتيب" وأن لا نقع في الفخ: حساب التكامل

↲ f و g و h دوال متصلة على $[a,b]$

إذا كان لدينا: $\forall x\in[a,b] \quad g(x) \leq f(x) \leq h(x)$

فإن: $\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b h(x)\,dx$

⊙ التطبيق

↲ يجب تأطير ما بداخل التكامل بذكاء:

لدينا: $x\in[0,1] \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$

$\Rightarrow e^0 \leq e^x \leq e^1 = e$

(لأن $x \mapsto e^x$ تزايدية على $\mathbb{R}$)

$\Rightarrow 1 \leq e^x \leq e$

$\Rightarrow \underbrace{x^n}_{g(x)} \leq \underbrace{x^n e^x}_{f(x)} \leq \underbrace{e\,x^n}_{h(x)} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow \int_0^1 x^n\,dx \leq \int_0^1 x^n e^x\,dx \leq \int_0^1 e\,x^n\,dx$

$\Rightarrow \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \leq U_n \leq e\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$

$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{V_n} \leq U_n \leq \underbrace{\frac{e}{n+1}}_{W_n} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

⊙ نطبق مصاديق التقارب

فإن: $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

لأن: $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty} W_n = 0$

مثال ⑤

إذا طلب منا حساب $I = \int_0^1 |e^x - 2|\,dx$

يجب استحضار التقنيات والمهارات التالية:

↲ علاقة شال للتكامل (إذا كانت إشارة العدد (e^x-2) تتغير على $[0,1]$)

↲ إشارة العدد (e^x-2) على $[0,1]$ (إذا كانت إشارة تتغير على $[0,1]$)

⊙ التطبيق

x	0		$\ln 2$		1
e^x-2		$-$	0	$+$	

علاقة شال $\Rightarrow$ $I = \int_0^{\ln 2} -(e^x-2)\,dx + \int_{\ln 2}^1 (e^x-2)\,dx$

$= \left[2x - e^x\right]_0^{\ln 2} + \left[-2x + e^x\right]_{\ln 2}^1$

$= 2\ln 2 - 2 + 1 - 2 + e + 2\ln 2 - 2$

$= 4\ln 2 + e - 5$