(تابع)

⊙ التطبيق

$$I=\int_0^1 x\, x^{1/4}dx=\int_0^1 x^{5/4}dx=\left[\frac{1}{1+5/4}x^{1+5/4}\right]_0^1$$

$$=\frac{4}{9}\underbrace{\left[x^{\frac{9}{4}}\right]_0^1}_{1}=\frac{4}{9}$$

مثال ③

إعطاء مثال حساب تكامل من نوع: $I=\int_0^1(2x+1)e^x dx$

نستحضر التقنيات والمهارات التالية:

⊙ تقنية المكاملة بالأجزاء

⊙ وضع: $\begin{cases}u'(x)=e^x\\ v(x)=2x+1\end{cases}$

⊙ التطبيق

نضع $\begin{cases}u'(x)=e^x\\ v(x)=2x+1\end{cases} \Leftarrow \begin{cases}u(x)=e^x\\ v'(x)=2\end{cases}$

$$\Rightarrow I=\left[(2x+1)e^x\right]_0^1-2\int_0^1 e^x dx$$

$$=3e-1-2\left[e^x\right]_0^1$$

$$=3e-1-2(e-1)=e+1.$$

مثال ④ متتالية معرفة بتكامل

نضع: $U_n=\int_0^1 x^n e^x dx$

⊙ بين أن (U_n) مصغورة

نستحضر التقنيات والمهارات التالية:

↵ إشارة $f(x)=x^ne^x$ على $[0,1]$

↵ استعمال الخاصيات:

$f\geq 0$ على $[a,b]$ $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx\geq 0$ (**)

$f\leq 0$ على $[a,b]$ $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx\leq 0$

(f متصلة على $[a,b]$)

⊙ التطبيق:

لدينا: $\forall x\in[0,1]\ f(x)=x^ne^x\geq 0$

$\Rightarrow \int_0^1 x^ne^x dx\geq 0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}\ U_n\geq 0$

$\Rightarrow (U_n)$ مصغورة بـ 0

⊙ بين أن (U_n) تناقصية واستنتج أنها متقاربة

يجب استحضار التقنيات والمهارات التالية:

↵ خطانية التكامل

↵ الخاصيات (**)

↵ الخاصيات:

$(U_n)\nearrow$ ومكبورة $\Rightarrow$ (U_n) متقاربة

$(U_n)\searrow$ ومصغورة $\Rightarrow$ (U_n) متقاربة

⊙ التطبيق

لدينا: $U_{n+1}-U_n=\int_0^1 x^{n+1}e^x dx-\int_0^1 x^ne^xdx$

$$=\int_0^1\left(x^{n+1}e^x-x^ne^x\right)dx$$

نفعل خطانية التكامل

$$\int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx=\int_a^b\left(f(x)\pm g(x)\right)dx$$

$$=\int_0^1 \underbrace{x^ne^x(x-1)}_{\leq 0}dx\leq 0$$ نفعل (**)

(لأن: $x\in[0,1]\Rightarrow x\leq 1$)

$\Rightarrow U_{n+1}-U_n\leq 0 \Rightarrow (U_n)$ تناقصية