درس: حساب التكامل

تقنيات ومهارات حساب التكامل

مثال ① إذا طلب منا حساب التكامل: $I=\int_0^{\pi/4}\sin^3(2x)\,dx$

يجب استحضار المهارات والتقنيات التالية:

1) إخطاط $\sin^3 x$ واستنتاج إخطاط $\sin^3(2x)$

2) لإخطاط $\sin^3 x$ يجب استحضار:

↲ صيغة أولير $\sin x=\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})$

↲ القواعد الأساسية الخاصة بالإخطاط:

$$(\forall n\in\mathbb{N})\begin{cases} e^{inx}+e^{-inx}=2\cos nx\\ e^{inx}-e^{-inx}=2i\sin nx \\ e^{inx}e^{-inx}=1\end{cases}$$

⊙ التطبيق: لدينا:

$$\sin^3 x=\left(\frac{1}{2i}\right)^3(e^{ix}-e^{-ix})^3$$
$$=-\frac{1}{8i}(e^{3ix}-3e^{2ix}e^{-ix}+3e^{ix}e^{-2ix}-e^{-3ix})$$
$$=-\frac{1}{8i}\left[(e^{3ix}-e^{-3ix})-3(e^{ix}-e^{-ix})\right]$$
$$=-\frac{1}{8i}(2i\sin 3x-6i\sin x)$$
$$=-\frac14(\sin 3x-3\sin x)$$

⊙ استنتاج: نضع: $X=2x$

$$\Rightarrow \sin^3 X=-\frac14(\sin 3X-3\sin X)$$
$$=-\frac14(\sin 6x-3\sin 2x)$$

⊙ حساب I

$$I=-\frac14\int_0^{\pi/4}(\sin 6x-3\sin 2x)\,dx$$
$$=-\frac14\left[-\frac16\cos 6x+\frac32\cos 2x\right]_0^{\pi/4}$$
$$=-\frac14\left[\frac{-1}{6}\underbrace{\cos\frac{3\pi}{2}}_{0}+\frac32\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0}+\frac16-\frac32\right]$$
$$=-\frac14\left(-\frac{16}{12}\right)=\frac13\Rightarrow \boxed{I=\frac13}$$

مثال ② إذا طلب منا حساب $I=\int_1^{e/2} x\ln 2x\,dx$

يجب استحضار المهارات والتقنيات التالية:

⊙ تقنية المكاملة بالأجزاء

⊙ عند تطبيق تقنية المكاملة بالأجزاء يجب وضع: $\begin{cases}u'(x)=x\\ v(x)=\ln 2x\end{cases}$ بدل $\begin{cases}u'(x)=\ln 2x\\ v(x)=x\end{cases}$

⊙ التطبيق

البحث عن دالة أصلية بالطريقة المباشرة صعب جدا لذلك نستعمل مكاملة بالأجزاء

نضع $\begin{cases}u'(x)=x\\v(x)=\ln 2x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u(x)=\frac{x^2}{2}\\ v'(x)=\frac{(2x)'}{2x}=\frac{2}{2x}=\frac1x\end{cases}$

$$\Rightarrow I=\frac12\left[x^2\ln 2x\right]_1^{e/2}-\frac12\int_1^{e/2}x\,dx$$
$$=\frac12\left[\frac{e^2}{4}\underbrace{\ln e}_{1}-\ln 2\right]-\frac14\left[x^2\right]_1^{e/2}$$
$$=\frac{e^2}{8}-\frac{\ln 2}{2}-\frac{e^2}{16}+\frac14=\frac{e^2-8\ln 2+4}{16}$$

مثال ③ إذا طلب منا حساب تكامل من نوع:

$$I=\int_0^1 x\sqrt[4]{x}\,dx$$

يجب استحضار التقنيات والمهارات التالية:

⊙ كتابة العدد $\sqrt[4]{x}$ بدون الرمز $\sqrt[4]{x}$

⊙ استعمال القاعدة: $a^r\times a^{r'}=a^{r+r'}$

⊙ استعمال الخاصية: الدوال الأصلية للدالة: $x\mapsto x^r$ حيث $r\in\mathbb{Q}-\{-1\}$ هي الدوال:

$$x\mapsto\frac{1}{r+1}x^{r+1}+\alpha/\alpha\in\mathbb{R}$$