درس: الأعداد العقدية — تقنيات ومهارات للأعداد العقدية

مثال ①

إذا كان لدينا: $\frac{c-a}{c-b} = -3i$

وطلب منا أن نبين أن $AC = 3BC$

يجب أن نستحضر التقنيات والمهارات التالية:

- المرور إلى المعيار
- استعمال القواعد التالية: $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad |\alpha i| = |\alpha|$

لأن: $|i| = |-i| = |\bar{i}| = 1$

- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ و $AB = |b-a|$

- التطبيق

لدينا: $\left|\frac{c-a}{c-b}\right| = |-3i| \Leftrightarrow \frac{|c-a|}{|c-b|} = |-3| = 3$

$\Leftrightarrow \frac{AC}{BC} = 3 \Leftrightarrow AC = 3BC$

مثال ②

إذا كان لدينا: $\frac{a-c}{b-c} = -i$

وطلب منا أن نبين أن المثلث ABC متساوي الساقين وقائم الزاوية في C

يجب أن نستحضر التقنيات والمهارات التالية:

- يكفي أن نحدد شكلا مثلثيا للعدد العقدي $-i$
- واستعمال الخاصية: $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) \equiv \arg\left(\frac{a-c}{b-c}\right) [2\pi]$ (**)

$\frac{a-c}{b-c} = \frac{\text{aff}(\overrightarrow{CA})}{\text{aff}(\overrightarrow{CB})}$

- التطبيق
- لنحدد شكلا مثلثيا للعدد العقدي $-i$:

نستحضر العلاقات الخاصة الأساسية التالية:

① $\begin{cases} ai = \left[a, \frac{\pi}{2}\right] & \forall a>0 \\ ai = \left[-a, -\frac{\pi}{2}\right] & \forall a<0 \end{cases}$

② $\begin{cases} \forall a>0 & a = [a, 0] \\ \forall a<0 & a = [-a, \pi] \end{cases}$

إذن: $-i = \underbrace{(-1)}_{a<0} i = \left[-(-1), -\frac{\pi}{2}\right]$

$= \left[1, -\frac{\pi}{2}\right]$

ومنه فإن:

(1) $\frac{a-c}{b-c} = \left[1, -\frac{\pi}{2}\right]$

إذن:

(1) $\Rightarrow \left|\frac{a-c}{b-c}\right| = 1 \Rightarrow |a-c| = |b-c|$

$\Rightarrow AC = BC$

ولدينا:

(1) $\Rightarrow \arg\left(\frac{a-c}{b-c}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}$

وبفضل الخاصية (**) لدينا:

$(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) \equiv \arg\left(\frac{a-c}{b-c}\right) [2\pi]$

$\equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$

إذن المثلث ABC متساوي الساقين وقائم الزاوية في C.

مثال ③

نضع: $a = 1+i$ و $b = -2i$ و $c = 2-2i$

تحقق أن $c = ab$ واستنتج شكلا مثلثيا للعدد العقدي c

- التحقق بسيط
- لتحديد شكل مثلثي لـ c نستحضر التقنيات والمهارات التالية:

(1) $[r, \theta] \times [r', \theta'] = [rr', \theta + \theta']$

(2) الأعداد العقدية الأساسية:

- $1+i = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]$
- $\sqrt{3}+i = \left[2, \frac{\pi}{6}\right]$
- $1+i\sqrt{3} = \left[2, \frac{\pi}{3}\right]$

- التطبيق

لدينا: $c = ab$

$\Leftrightarrow c = (1+i)(-2i)$

$= \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]\left[2, -\frac{\pi}{2}\right]$

$= \left[2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right] = \left[2\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right]$