Exercice 1 - Ordre et $\mathbb{R}$ - *L1/Math Sup* - $\star$

Démontrer les propositions suivantes :

1. Si a est un réel tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, on ait $|a| < \varepsilon$, alors $a = 0$.
2. Si a et b sont deux réels tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $b < x \implies a < x$, alors $a \leq b$.

Valeur absolue - Partie entière

Exercice 2 - Partie entière et somme - *L1/Math Sup* - $\star$

Soient a, b deux réels. Prouver que

$$E(a) + E(b) \leq E(a+b) \leq E(a) + E(b) + 1.$$

Exercice 3 - Produit et division - *L1/Math Sup* - $\star\star$

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que

$$E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x).$$

Exercice 4 - Somme de parties entières - *L1/Math Sup* - $\star\star\star$

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver que

$$\sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) = E(nx).$$

Exercice 5 - Une somme - *L1/Math Sup* - $\star\star$

Calculer $\sum_{k=1}^{2010} E(\sqrt{k})$.

Exercice 6 - Egalités et inégalités avec des valeurs absolues - *L1/Math Sup* - $\star$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $\lvert x+3\rvert = 5$	**2.** $\lvert x+3\rvert \leq 5$
3. $\lvert x+2\rvert > 7$	**4.** $\lvert 2x-4\rvert \leq \lvert x+2\rvert$
5. $\lvert x+12\rvert = \lvert x^2-8\rvert$	**6.** $\lvert x+12\rvert \leq \lvert x^2-8\rvert$.

Exercice 7 - Avec des racines carrées - *L1/Math Sup* - $\star\star$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ est un entier pair. En déduire que la partie entière de $(2+\sqrt{3})^n$ est un entier impair.

Exercice 8 - Inégalités avec des valeurs absolues - *L1/Math Sup* - $\star\star$

Soient x et y des réels. Démontrer les inégalités suivantes :

1. $|x| + |y| \leq |x+y| + |x-y|$ **2.** $1 + |xy-1| \leq (1+|x-1|)(1+|y-1|)$

3. $\dfrac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \dfrac{|x|}{1+|x|} + \dfrac{|y|}{1+|y|}$.

BORNE INFÉRIEURE - BORNE SUPÉRIEURE

Exercice 9 - En pratique - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

Soient a, b deux réels strictement positifs. Les parties suivantes sont-elles majorées, minorées ? Si oui, déterminer leurs bornes supérieures, inférieures.

1. $\{a + bn;\ n \in \mathbb{N}\}$ **2**. $\{a + (-1)^n b;\ n \in \mathbb{N}\}$
3. $\{a + b/n;\ n \in \mathbb{N}^*\}$ **4**. $\{(-1)^n a + b/n;\ n \in \mathbb{N}^*\}$
5. $\{a + (-1)^n b/n;\ n \in \mathbb{N}^*\}$.

Exercice 10 - Atteint ou non ? - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

Les parties de $\mathbb{R}$ suivantes sont elles-minorées, majorées ? Dans chaque cas, déterminer s'il y a lieu la borne inférieure, la borne supérieure, et dire s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum.

$$A = \left\{\frac{n}{mn+1};\ (m,n) \in \mathbb{N}^{*2}\right\}, \qquad B = \left\{\frac{n}{mn+1};\ (m,n) \in \mathbb{N}^2\right\}.$$

Exercice 11 - Borne sup non atteinte - *L1/Math Sup* - ⋆

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ majorée et on note $M = \sup A$. On suppose que $M \notin A$. Démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]M - \varepsilon, M[$ contient une infinité d'éléments de A.

Exercice 12 - Diverses opérations - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

Soient A et B deux parties non-vides et bornées de $\mathbb{R}$, et $x \in \mathbb{R}$. On note

$$-A = \{-a;\ a \in A\} \qquad A + B = \{a + b;\ a \in A, b \in B\}$$
$$x + A = \{x + a;\ a \in A\} \qquad AB = \{ab;\ a \in A, b \in B\}.$$

1. Montrer que $\sup(-A) = -\inf(A)$.
2. Montrer que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.
3. Montrer que $\sup(x + A) = x + \sup(A)$.
4. A-t-on toujours $\sup(AB) = \sup(A) \times \sup(B)$? Quelle hypothèse peut-on ajouter pour que cela soit vrai ?

Exercice 13 - Application à l'existence d'un point fixe d'une application croissante de $[0,1]$ dans $[0,1]$ - *L1/Math Sup* - ⋆⋆⋆

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application croissante. On note $E = \{x \in [0,1]; f(x) \geq x\}$.

1. Montrer que E admet une borne supérieure b.
2. Prouver que $f(b) = b$.

Exercice 14 - Plus petit et plus grand - *L1/Math Sup* - ⋆

Soient A et B deux parties non-vides de $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall a \in A,\ \forall b \in B,\ a \leq b.$$

Démontrer que A est majoré, B est minoré et $\sup(A) \leq \inf(B)$.

Exercice 15 - Écart - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

Soit A une partie non-vide et bornée de $\mathbb{R}$. On note $B = \{|x - y|;\ (x,y) \in A^2\}$.

1. Justifier que B est majorée.
2. On note $\delta(A)$ la borne supérieure de cet ensemble. Prouver que $\delta(A)=\sup(A)-\inf(A)$.

Exercice 16 - Avec n termes - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

1. Vérifier que, pour tous réels $x_i,x_j>0$, on a
$$\frac{x_i}{x_j}+\frac{x_j}{x_i}=\frac{x_i^2+x_j^2}{x_ix_j}\geq 2.$$
2. Soit $n\geq 1$ fixé. Déterminer
$$\inf\left\{(x_1+\dots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\dots+\frac{1}{x_n}\right);\ x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}_+^*\right\}.$$

Rationnels et irrationnels

Exercice 17 - Irrationnels ! - *L1/Math Sup* - ⋆

Démontrer que les réels suivants sont irrationels :

1. $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ où x et y sont des rationnels positifs tels que $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ sont irrationnels.
2. $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

Exercice 18 - Intervalles et rationnels - *L1/Math Sup* - ⋆

Soient I et J deux intervalles ouverts. On suppose que $(I\cap\mathbb{Q})\cap(J\cap\mathbb{Q})=\varnothing$. Démontrer que $I\cap J=\varnothing$.

Exercice 19 - Homographie - *L1/Math Sup* - ⋆

Soit x un nombre irrationnel et $(a,b,c,d)\in\mathbb{Q}^4$. Prouver que, si $ad-bc\neq 0$, alors $\frac{ax+b}{cx+d}$ est un nombre irrationnel.

Exercice 20 - Suite de rationnels - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

Soit (u_n) une suite de nombres rationnels ; on écrit chaque u_n sous forme irréductible, $u_n=\frac{p_n}{q_n}$, avec $q_n>0$, et on suppose que (u_n) converge vers a.

1. On suppose que la suite (q_n) est bornée. Démontrer que (u_n) est stationnaire.
2. On suppose que $a\notin\mathbb{Q}$. Démontrer que (q_n) tend vers $+\infty$.

Divers

Exercice 21 - Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ - *L1/Math Sup* - ⋆⋆⋆

Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ non réduit à $\{0\}$, et on pose $G=H\cap]0,+\infty[$.

1. Montrer que G admet une borne inférieure α dans $\mathbb{R}_+$.
2. On suppose que $\alpha>0$. Démontrer que $\alpha\in H$, puis que $H=\alpha\mathbb{Z}$.
3. On suppose que $\alpha=0$. Démontrer que H est dense dans $\mathbb{R}$.