# Bien se Préparer à l'Examen National

Proposé par le Prof : ABDELOUHAB ABDERREZAK

Sujet : 2 — 2 Bac SM

## Problème (3★)

**I** On pose : $f(x) = xe^{-x} + e^{-x}$ $\forall x \in \mathbb{R}^+$

1) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2) Etudier les variations de $f$ sur $\mathbb{R}^+$.

3) Déterminer une primitive de la fonction : $x \longmapsto xe^{-x}$

4) Montrer que :

a) $\forall x \geq 0 \quad 0 \leq xe^{-x} \leq 1$

b) $\forall x > 0 \quad f(2x) - f(x) < 0$

5) a) Vérifier que :

$\forall u \in [0,1] \quad 1 - u \leq \dfrac{1}{1+u} \leq 1 - \dfrac{u}{2}$

b) En déduire que :

$\forall t \geq 0 \quad 1 - te^{-t} \leq \dfrac{1}{1+te^{-t}} \leq 1 - \dfrac{t}{2}e^{-t}$

**II** On considère $F$ définie par :

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{1+te^{-t}}\,dt \quad \text{où } x \in \mathbb{R}^+$$

1) Vérifier que $D_F = \mathbb{R}^+$

2) a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+$ on a

$x + (f(2x) - f(x)) \leq F(x) \leq x + \frac{1}{2}(f(2x) - f(x))$

b) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (F(x) - x)$ puis interpréter géométriquement le dernier résultat.

3) Montrer que $F$ est bien continue en 0.

4) Montrer que : $F'_d(0) = 1$ et interpréter géométriquement ce résultat.

5) Montrer que : $\forall x > 0 \quad F(x) < x$ et interpréter géométriquement ce résultat.

6) a) Montrer que $F$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$.

b) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad F'(x) > 0$ et donner le tableau de variations de $F$.

7) Construire dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe $(\mathcal{C}_F)$.

## Ex : Suite Intégrale (New)

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique définie par :

$$U_n = \int_0^1 x^n \arctan x\,dx \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) Calculer $U_0$

2) Montrer que $(U_n)$ est minorée.

3) a) Etudier la monotonie de $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$

b) En déduire que $(U_n)$ est convergente.

4) a) Montrer que :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq U_n \leq \dfrac{\pi}{4(n+1)}$

b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

5) a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n = \dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{\pi}{4} - \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^2}\,dx\right)$

b) Calculer $U_1$ et $U_2$.

Avant de s'élancer il faut penser