2Bac SM

الاستعداد الجيد للامتحان الوطني

(3*) اقتراح 2 : اقتراح الأستاذ : عبد الرزاق عبد الوهاب

مسألة (3*)

I) نضع : $\forall x\in\mathbb{R}^+ \quad f(x)=xe^{-x}+e^{-x}$

1) أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2) أدرس تغيرات f على $\mathbb{R}^+$.

3) حدد دالة أصلية للدالة $x\mapsto xe^{-x}$

4) بين أن :

أ- $\forall x\geq 0 \quad 0\leq xe^{-x}\leq 1$

ب- $\forall x>0 \quad f(2x)-f(x)<0$

5) أ- تحقق أن :

$\forall u\in[0,1] \quad 1-u\leq \frac{1}{1+u}\leq 1-\frac{1}{2}u$

ب- استنتج أن :

$\forall t\geq 0 \quad 1-te^{-t}\leq \frac{1}{1+te^{-t}}\leq 1-\frac{1}{2}te^{-t}$

II) نعتبر الدالة F المعرفة بما يلي :

$F(x)=\int_x^{2x}\frac{1}{1+te^{-t}}\,dt$ حيث $x\in\mathbb{R}^+$

1) تحقق أن $D_F=\mathbb{R}^+$

2) أ- بين أن :

$\forall x\geq 0 \quad x+f(2x)-f(x)\leq F(x)\leq x+\frac{1}{2}(f(2x)-f(x))$

ب- استنتج $\lim_{x\to+\infty}F(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}(F(x)-x)$

ثم أول هندسيا النتيجة الأخيرة

3) بين أن F متصلة في الصفر.

4) بين أن : $F'_d(0)=1$ ثم حدد معادلة نصف المماس لـ (C_F) في النقطة O على اليمين

5) بين أن : $\forall x>0 \quad F(x)<x$

وأول هندسيا هذه النتيجة.

6) أ- بين أن F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^+$.

ب- تحقق أن :

$\forall x\geq 0 \quad F'(x)=\frac{e^{2x}+2x(e^{x}-1)}{(e^{2x}+2x)(1+xe^{-x})}$

ج- استنتج أن : $\forall x\in\mathbb{R}^+ \quad F'(x)>0$

ثم أعط جدول تغيرات F.

7) أنشئ في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ المنحنى (C_F).

تمرين (3*) New

لتكن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية معرفة بما يلي :

$U_n=\int_0^1 x^n\arctan x\,dx \quad \forall n\in\mathbb{N}$

1) Calculer U_0

2) a) Montrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée.

b) Etudier la monotonie de (U_n) et en déduire que (U_n) est convergente.

3) a) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N} \quad 0\leq U_n\leq \frac{\pi}{4(n+1)}$ et calculer $\lim_{n\to+\infty} U_n$

4) a) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N} \quad U_n=\frac{\pi}{4(n+1)}-\frac{1}{n+1}\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x^2}\,dx$

b) Calculer U_1 et U_2.