Exercices - Applications - Injection - surjection - bijection : corrigé

Exemples

Exercice 1 - Quelques exemples - *L1/Math Sup* - $\star$

f_1 est injective, non surjective (et donc non bijective) : 1 n'a pas d'antécédents. f_2 est bijective. f_3 n'est ni injective ($f(-1)=f(1)=1$), ni surjective (-1 n'a pas d'antécédent). f_4 et f_5 sont surjectives, mais non injectives.

Exercice 2 - Encore des exemples - *L1/Math Sup* - $\star$

1. f est clairement injective, mais n'est pas surjective car 0 n'a pas d'antécédent.
2. g est bijective : l'équation $n+1=k$, avec $k\in\mathbb{Z}$ admet une unique solution $n\in\mathbb{Z}$ qui vaut $n=k-1$.
3. h est bijective : prenons en effet un couple (x_1,y_1) de $\mathbb{R}^2$, et essayons de résoudre le système :
$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y &=& x_1\\ x-y &=& y_1\end{array}\right.$$
Ce système possède une unique solution, donnée par $=(x_1+y_1)/2$ et $y=(x_1-y_1)/2$. L'application est bijective.

Exercice 3 - Exemples d'image directe et d'image réciproque - *L1/Math Sup* - $\star$

1. (a) On cherche toutes les valeurs prises par x^2 lorsque x parcourt $[-1,4]$. Entre -1 et 0, ce sont toutes les valeurs de 0 à 1 qui sont prises, et entre 0 et 4, toutes les valeurs entre 0 et 16. On a donc $f(A)=[0,16]$.
   (b) On a $x\in f^{-1}(A)$ si et seulement si $x^2\in[-1,4]$. Bien sûr, les valeurs négatives sont exclues, et pour que x^2 soit dans $[0,4]$, il est nécessaire et suffisant que $x\in[-2,2]$. On a donc $f^{-1}(A)=[-2,2]$.
2. L'image directe de $\mathbb{R}$ comme de $[0,2\pi]$ est $[-1,1]$. L'image directe de $[0,\pi/2]$ est $[0,1]$. Pour déterminer l'image réciproque de $[0,1]$, on cherche les réels x tels que $\sin(x)\in[0,1]$. Ce sont tous les réels qui peuvent s'écrire $u+k2\pi$, avec $u\in[0,\pi]$ et $k\in\mathbb{Z}$. On peut encore écrire cet ensemble
$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[2k\pi,(2k+1)\pi].$$
Aucun réel n'a son sinus dans $[3,4]$. L'image réciproque de $[3,4]$ est donc l'ensemble vide. Enfin, l'image réciproque de $[1,2]$ est identique à l'image réciproque de $\{1\}$, et elle est évale à $\{\pi/2+2k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\}$.

Exercice 4 - Un exemple avec des fonctions - *L1/Math Sup* - $\star\star$

1. f n'est pas injective, car $f(2)=f(1/2)=4/5$. f n'est pas surjective, car $y=2$ n'a pas d'antécédent : en effet, l'équation $f(x)=2$ devient $2x=2(1+x^2)$ soit $x^2-x+1=0$ qui n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$.
2. L'équation $f(x)=y$ est équivalent à l'équation $yx^2-2x+y=0$. Cette équation a des solutions x si et seulement si $\Delta=4-4y^2\geq 0$, donc il y a des solutions si et seulement si $y\in[-1,1]$. Ainsi, on a exactement $f(\mathbb{R})=[-1,1]$.

3. Soit $y\in[-1,1]$. Les solutions possibles de l'équation $g(x)=y$ sont $x=\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$ ou $x=\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}$. La deuxième solution n'appartient pas à $[-1,1]$. D'autre part, $x=\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}=\frac{y}{1+\sqrt{1-y^2}}$ est dans $[-1,1]$. L'équation $g(x)=y$ admet donc une unique solution avec $x\in[-1,1]$. Nous avons bien prouvé que g est une bijection.

Exercice 5 - Avec des nombres complexes - *L1/Math Sup* - ⋆

On va démontrer directement que f est bijective en prouvant que, pour tout $w\in\mathbb{C}\backslash\{i\}$, l'équation $f(z)=w$ admet une unique solution $z\in\mathbb{C}\backslash\{3\}$. Pour cela, on remarque que

$$\begin{aligned}\frac{iz-i}{z+3}=w &\iff iz-i=wz+3w\\ &\iff (i-w)z=3w+i.\end{aligned}$$

Puisque $w\neq i$, ceci est encore équivalent à

$$z=\frac{3w+i}{i-w}.$$

L'équation admet une unique solution : f est bijective et sa bijection réciproque est donnée par

$$f^{-1}(w)=\frac{3w+i}{i-w}.$$

Exercice 6 - Une bijection de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

Remarquons d'abord que f est bien à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Prouvons ensuite que f est injective. Soient (n,p) et (m,q) deux éléments de $\mathbb{N}^2$ tels que $f(n,p)=f(m,q)$. Alors on a $2^n(2p+1)=2^m(2q+1)$. Supposons par exemple $n\geq m$. Alors on obtient

$$2^{n-m}(2p+1)=2q+1.$$

Si $n\neq m$, le terme de gauche est pair et celui de droite est impair, une contradiction. Donc $n=m$. On obtient alors $2p+1=2q+1$, soit aussi $p=q$. Finalement, on a bien $(n,p)=(m,q)$ et donc f est injective. Prouvons ensuite que f est surjective. Soit $l\in\mathbb{N}^*$. Alors l se décompose en produit de facteurs premiers

$$l=2^n p_2^{\alpha_2}\dots p_r^{\alpha_r},$$

avec p_i, $i\geq 2$, des nombres premiers impairs. Le produit de nombres impairs étant impair, on sait que $p_2^{\alpha_2}\dots p_r^{\alpha_r}$ est impair et s'écrit donc $2p+1$, avec $p\in\mathbb{N}$. On a donc $l=2^n(2p+1)=f(n,p)$ et f est surjective. Pour trouver une bijection de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$, il suffit de composer avec une bijection de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}$, par exemple l'application $n\mapsto n-1$. Ainsi, l'application $g:(n,p)\mapsto 2^n(2p+1)-1$ est une bijection de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$.

Exercice 7 - Un exemple avec de l'arithmétique - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

On va commencer par prouver que f est injective. Prenons (p,q) et (p',q') tels que $f(p,q)=f(p',q')$. On souhaite prouver que $(p,q)=(p',q')$. On raisonne par l'absurde et on suppose que ce n'est pas vrai. Clairement, on doit avoir $p\neq p'$ (si $p=p'$, alors $q=q'$). Quitte à permuter les rôles, on peut supposer que $p'>p$, et donc $p'-p\geq 1$. On écrit alors

$$f(p,q)=f(p',q')\iff p'-p=\frac{1}{q}-\frac{1}{q'}.$$

Mais $0 < \frac{1}{q'} \leq 1$ et $-1 \leq -\frac{1}{q} < 0$. On en déduit que

$$-1 < \frac{1}{q} - \frac{1}{q'} < 1,$$

ce qui contredit que $p' - p \geq 1$. On a bien $(p,q) = (p',q')$, et f est injective.
On va ensuite prouver que f n'est pas surjective. En effet, $2/3$ n'a pas d'antécédents. Sinon, il s'écrirait $p + \frac{1}{q}$. Puisque $p \leq p + 1/q = 2/3 < p+1$, il faudrait nécessairement que $p = 0$. Et donc on aurait $\frac{2}{3} = \frac{1}{q}$ soit $q = 3/2$, ce qui n'est pas un entier.

Exercice 8 - Devinettes... - *L1/Math Sup* - ⋆⋆⋆

1. Posons $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$, définie par $f(n) = n+1$. Remarquons f est bien à image dans $\mathbb{N}^*$. Il reste à prouver que f est bijective, ce qui est très facile avec la définition : si $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f(k) = n \iff k+1 = n \iff k = n-1$, l'équation $f(k) = n$ admet une unique solution dans $\mathbb{N}$, ce qui dit bien que f est bijective.
2. Posons $g : \{1/n;\ n \geq 1\} \to \{1/n;\ n \geq 2\}$, définie par $g(1/n) = 1/(n+1)$. Remarquons là aussi que l'ensemble d'arrivée est bien cohérent avec l'ensemble de départ. D'autre part, g est bijective.
3. C'est plus compliqué ! ! ! Ecrivons $[0,1] = \{1/n;\ n \geq 1\} \cup A$, où A est le complémentaire de $\{1/n;\ n \geq 1\}$ dans $[0,1]$. On définit h de la façon suivante :
   – Si $x = 1/n$, alors $h(x) = 1/(n+1)$.
   – Sinon, c'est-à-dire si $x \in A$, $h(x) = x$.
   Alors h est bijective ! Prouvons d'abord qu'elle est injective : si $h(x) = h(x')$, on distingue 3 cas :
   – Si $x \in A$ et $x' \in A$, alors $h(x) = x$ et $h(x') = x'$ ce qui entraîne $x = x'$.
   – Si $x \in A$ et $x' \notin A$, écrivant $x' = 1/k$, on a $x = h(x) = h(x') = 1/(k+1)$, ce qui implique $x \notin A$, ce qui est impossible.
   – Si $x \notin A$ et $x' \notin A$, écrivant $x = 1/k$ et $x' = 1/n$, on a $1/(k+1) = h(x) = h(x') = 1/(n+1)$ ce qui entraîne $k+1 = n+1$ et par suite $x = x'$.
   Dans tous les cas possibles, on trouve $x = x'$, et h est injective. Prouvons maintenant que h est surjective, et choisissons $y \in [0,1[$. Si $y \in A$, en particulier $y \neq 1$, et on a $h(y) = y$. Si $y \notin A$, $y = 1/n$, où n est entier strictement plus grand que 1 puisque $y \neq 1$. On a alors $h(1/(n-1)) = y$. Dans tous les cas, y possède un antécédent, ce qui prouve que h est surjective.
4. Rappelons que tout entier peut s'écrire $2k$ s'il est pair, et $2k+1$ s'il est impair. Posons $f(2k) = k$, et $f(2k+1) = -k$. Reste à vérifier que f est bijective, ce qui est laissé au lecteur !

Exercices théoriques

Exercice 9 - Implications... - *L1/Math Sup* - ⋆

Première implication : si $f(a) = f(b)$, alors $g \circ f(a) = g \circ f(b)$, et puisque $g \circ f$ est injective, on en déduit $a = b$.
Deuxième implication : soit $y \in C$. Puisque $g \circ f$ est surjective, il existe $a \in A$ avec $g \circ f(a) = y$.

Posons $b = f(a)$. On a alors $g(b) = y$, ce qui prouve que g est surjective.
Equivalence : d'abord, si f, g et h sont bijectives, la composée d'applications bijectives étant bijective, on en déduit que $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives. Réciproquement, puisque $g \circ f$ est bijective, elle est surjective, et on trouve que g est surjective. D'autre part, puisque $h \circ g$ est bijective, elle est injective et donc g est injective. On trouve donc que g est bijective. Puisque $g \circ f$ est bijective, composant par g^{-1} à gauche qui est bijective, f est bijective.

Exercice 10 - Image directe de l'image réciproque...et vice-versa ! - *L1/Math Sup* - $\star$

1. Soit $x \in A$. On a $f(x) \in A$, et donc $x \in f^{-1}(f(A))$. Ainsi, on a prouvé l'inclusion $A \subset f^{-1}(f(A))$.
2. Soit $y \in f(f^{-1}(B))$. Alors il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$. Mais puisque $x \in f^{-1}(B)$, alors $f(x) \in B$. Et donc $y = f(x) \in B$. On a bien prouvé l'inclusion $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
3. Prenons $f : \{1, 2\} \to \{1, 2\}$, $1 \mapsto 1$ et $2 \mapsto 1$ et $B = \{1, 2\}$. Alors $f^{-1}(B) = \{1, 2\}$ et $f(f^{-1}(B)) = \{1\}$ qui est différent de B.
   Pour l'autre exemple, prenons $A = \{1\}$. Alors $f(A) = \{1\}$ et $f^{-1}(f(A)) = \{1, 2\}$ qui est différent de A.

Exercice 11 - Ensembles et images réciproques - *L1/Math Sup* - $\star$

1. Prenons $x \in f^{-1}(A)$. Alors $f(x) \in A$ et donc $f(x) \in B$, et donc $x \in f^{-1}(B)$, ce qui prouve l'inclusion $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$. La réciproque n'est pas toujours vraie. Prenons $E = \{1\}$, $F = \{1, 2\}$, $f : E \to F$ définie par $f(1) = 1$, $A = \{2\}$ et $B = \{1\}$. Alors $f^{-1}(A) = \varnothing \subset f^{-1}(B) = \{1\}$. Et pourtant, A n'est pas inclus dans B.
2. On a $A \cap B \subset A$, et donc $f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(A)$. De même, $f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(B)$, et donc $f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
   Réciproquement, soit $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. Alors on a à la fois $f(x) \in A$ et $f(x) \in B$, ce qui entraîne $f(x) \in A \cap B$. Ainsi, $x \in f^{-1}(A \cap B)$, et donc $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cap B)$.
3. On a $A \subset A \cup B$ et donc $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(A \cup B)$. De même, $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cup B)$ et donc $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cup B)$.
   Réciproquement, si $x \in f^{-1}(A \cup B)$, alors $f(x) \in A \cup B$. Ainsi, ou bien $f(x) \in A$, ou bien $f(x) \in B$. Mais si $f(x) \in A$, on a $x \in f^{-1}(A) \subset f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ et de même, si $f(x) \in B$, on a $x \in f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Dans tous les cas, on a prouvé que $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ et donc l'inclusion $f^{-1}(A \cup B) \subset f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

Exercice 12 - Ensembles et images directes - *L1/Math Sup* - $\star$

1. Prenons $y \in f(A)$. Alors il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$. Mais alors, $x \in B$ et donc $y \in f(B)$. Ceci prouve l'inclusion $f(A) \subset f(B)$. La réciproque n'est pas toujours vraie. Prenons $E = \{1, 2\}$, $F = \{1\}$, $f : E \to F$ définie par $f(1) = 1$, $f(2) = 1$, $A = \{1\}$ et $B = \{2\}$. Alors $f(A) = f(B) = \{1\}$ alors que pourtant A n'est pas inclus dans B.
2. On a $A \cap B \subset A$, et donc $f(A \cap B) \subset f(A)$. De même, $f(A \cap B) \subset f(B)$, et donc $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
   L'inclusion réciproque est fausse, ce que l'on constate en prenant exactement le même exemple.

3. On a $A \subset A \cup B$ et donc $f(A) \subset f(A \cup B)$. De même, $f(B) \subset f(A \cup B)$ et donc $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.
   Réciproquement, si $y \in f(A \cup B)$, alors il existe $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$. Mais si $x \in A$, on a $y \in f(A) \subset f(A) \cup f(B)$ et de même, si $x \in B$, on a $y \in f(B) \subset f(A) \cup f(B)$. Dans tous les cas, on a prouvé que $y \in f(A) \cup f(B)$ et donc l'inclusion $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.

Exercice 13 - Image directe et injectivité - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

1 $\implies$ 2 : D'abord, une inclusion est toujours vérifiée : prenons en effet $y = f(A \cap B)$. Alors il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$. Mais alors, $y \in f(A)$ puisque $y = f(x)$ avec $x \in A$. De même, $y \in f(B)$. On en déduit que $y \in f(A) \cap f(B)$. Réciproquement, si $y \in f(A) \cap f(B)$, alors il existe $a \in A$ tel que $y = f(a)$ et $b \in B$ tel que $y = f(b)$. Mais puisque f est injective, on a $a = b$, et donc $a \in A \cap B$. On en déduit que $y \in f(A \cap B)$.

2 $\implies$ 1 : Soit a et b tels que $f(a) = f(b) = y$. Prenons $A = \{a\}$ et $B = \{b\}$. Remarquons que $f(A) = f(B) = \{y\}$. Alors, on a $f(A \cap B) = \{y\}$. En particulier, $A \cap B \neq \varnothing$, et donc $a = b$.

Exercice 14 - Caractérisations - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

1. Supposons d'abord f injective et soient $g : Z \to X$ et $h : Z \to X$ telles que $f \circ g = g \circ h$. Alors, pour tout z de Z, on a $f(g(z)) = f(h(z)) \implies g(z) = h(z)$ puisque f est injective. On a donc bien $g = h$.
   Pour montrer l'implication réciproque, on procède par contraposée en supposant que f n'est pas injective. Soit $x \neq y$ tel que $f(x) = f(y)$. Posons $Z = \{0\}$, $g(0) = x$ et $h(0) = y$. Alors on a $f \circ g(0) = f \circ h(0) (= f(x) = f(y))$ alors que $g \neq h$.
2. Supposons d'abord f surjective et soient $g : Y \to Z$ et $h : Y \to Z$ telles que $g \circ f = h \circ f$. Soit $y \in Y$. Il existe x de X tel que $y = f(x)$. On en déduit $g(y) = g \circ f(x) = h \circ f(x) = h(y)$, ce qui prouve $g = h$.
   Pour montrer l'implication réciproque, on procède par contraposée en supposant que f n'est pas surjective. Il existe donc un point y_0 de Y qui n'est pas dans $f(X)$. On considère alors $Z = \{0, 1\}$, g défini sur Y par $g(y_0) = 1$ et $g(y) = 0$ sinon, h défini sur Y par $h(y) = 0$ pour tout y. Alors on a bien $g \circ f = h \circ f$ (car $f(x) \neq y_0$ pour tout x de X) et $h \neq g$.

Exercice 15 - Bijectivité et passage au complémentaire - *Math Sup/L1* - ⋆⋆⋆

Pour l'implication directe, on suppose que f est bijective, et prenons A un élément de $\mathcal{P}(E)$. On doit montrer une double inclusion. Soit d'abord x dans $f(\overline{A})$. Alors $x = f(y)$ où $y \in \overline{A}$. Supposons que $x \in f(A)$. Alors $x = f(z)$ où $z \in A$. Mais alors, on a $f(y) = f(z)$ et par injectivité de f, on a $y = z$. Comme y est élément de A et z est élément de son complémentaire, ceci est impossible et donc $x \notin f(A)$, c'est-à-dire qu'on a prouvé que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.
Prouvons maintenant l'autre inclusion. Soit $x \in \overline{f(A)}$. Alors, puisque f est surjective, il existe y élément de E tel que $x = f(y)$. Mais y ne peut pas être élément de A sinon x serait élément de $f(A)$ ce qui n'est pas. Et donc y est élément de $\overline{A}$ et $x \in f(\overline{A})$.
Etudions maintenant l'implication réciproque, c'est-à-dire qu'on suppose que pour tout A de $\mathcal{P}(E)$, on a $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$. Prouvons d'abord que ceci entraine que f est injective. En effet, pour x, y tels que $f(x) = f(y)$, supposons $x \neq y$. Posons $A = \{x\}$. On a $y \in \overline{A}$ et donc

$f(y) \in f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$. Or, $f(A) = \{f(x)\}$, et donc $f(y) \neq f(x)$, une contradiction.
Prouvons enfin que f est surjective. Par hypothèse appliquée à $A = E$, on sait que $f(\overline{E}) = \overline{f(E)}$. Mais $f(\overline{E}) = f(\emptyset) = \emptyset$, et donc $\overline{f(E)} = \emptyset$ ce qui, en prenant le complémentaire, se traduit en $f(E) = F$, c'est-à-dire que f est surjective.

Exercice 16 - Ensemble des parties - *L1/Math Sup* - $\star\star\star$

1. Pour démontrer le sens direct, on raisonne par contraposée : si $A \cup B \neq E$, on prend $x \in E \backslash (A \cup B)$ et $X = \{x\}$. Alors $f(X) = (X \cap A, X \cap B) = (\varnothing, \varnothing)$ car x n'appartient ni à A ni à B. D'autre part, $f(\varnothing) = (\varnothing, \varnothing)$. Donc $f(X) = f(\varnothing)$ alors que $X \neq \varnothing$: f n'est pas injective.
   Pour le sens réciproque, remarquons que pour tout $X \subset E$, puisque $A \cup B = E$, on a
   $$X = X \cap E = X \cap (A \cup B) = (X \cap A) \cup (X \cap B).$$
   Ainsi, si $X, X' \subset E$ sont tels que $f(X) = f(X')$, c'est-à-dire $X \cap A = X \cap A'$ et $X \cap B = X \cap B'$, on a
   $$X = (X \cap A) \cup (X \cap B) = (X' \cap A) \cup (X' \cap B) = X'.$$
   Ainsi, f est injective.
2. Supposons d'abord que f est surjective et prenons $x \in A$. Alors il existe $X \subset E$ tel que $f(X) = (\{x\}, \varnothing)$. Alors, on a $X \cap B = \varnothing$ et $x \in X \cap A$. Ainsi, $x \in X$ et donc $x \notin B$. Ainsi, on a $A \cap B = \varnothing$.
   Réciproquement, si $A \cap B = \varnothing$, et prenons $A' \subset A$ et $B' \subset B$. Alors, posons $X = A' \cup B'$. Puisque $A \cap B = \varnothing$, on a $X \cap A = A'$ et $X \cap B = B'$ et donc $f(X) = (A', B')$: f est surjective.
3. D'après les questions précédentes, on a f bijective si et seulement si $A \cup B = E$ et $A \cap B = \varnothing$, ie si (A, B) est une partition de E. La bijection réciproque a été établie à la question précédente et est donnée par $(A', B') \mapsto A' \cup B'$.

Exercice 17 - Fonctions et fonctions d'ensemble - *L1/Math Sup* - $\star\star\star$

1. Supposons d'abord que $f^\sharp$ est injective, et prouvons que f l'est. Soient $x, y \in E$ avec $f(x) = f(y)$. Posons $A = \{x\}$ et $B = \{y\}$. Alors $f^\sharp(A) = f^\sharp(B) = \{f(x)\}$. Ainsi, par injectivité de $f^\sharp$, $A = B$ et donc $x = y$. f est injective.
   Réciproquement supposons que f est injective, et prouvons que $f^\sharp$ l'est aussi. Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$ tels que $f^\sharp(A) = f^\sharp(B)$. Prenons ensuite $x \in A$ et montrons que $x \in B$. On a $f(x) \in f(A) = f(B)$, donc il existe $y \in B$ tel que $f(x) = f(y)$. Maintenant, puisque f est injective, ceci entraîne que $x = y$. Ainsi, $x \in B$ et on a prouvé que $A \subset B$. Bien entendu, par symétrie du rôle joué par A et B, on a $A = B$ et $f^\sharp$ est injective.
2. Supposons d'abord que $f_\sharp$ est injective, et prouvons que f est surjective. Soit $y \in F$. Puisque $f_\sharp(\varnothing) = \varnothing$, on a $f_\sharp(\{y\}) \neq \varnothing$, et donc il existe $x \in f_\sharp(\{y\}) = f^{-1}(\{y\})$. Ainsi, $y = f(x)$ et f est surjective.
   Supposons maintenant que f est surjective, et prouvons que $f_\sharp$ est injective. Soient $A, B \in \mathcal{P}(F)$ tels que $f_\sharp(A) = f_\sharp(B)$. Considérons $y \in A$. Alors, puisque f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Mais $x \in f^{-1}(A)$ et donc $x \in f^{-1}(B)$ ce qui signifie que $f(x) \in B$. Mais $y = f(x)$, et donc $y \in B$. On a donc prouvé que $A \subset B$, et, toujours par symétrie du rôle joué par A et B, on en déduit que $A = B$, c'est-à-dire que $f_\sharp$ est injective.