EXEMPLES

Exercice 1 - Quelques exemples - *L1/Math Sup* - $\star$

Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

$$f_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto 2n,\ f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto -n$$

$$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2,\ f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto x^2$$

$$f_5 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^2.$$

Exercice 2 - Encore des exemples - *L1/Math Sup* - $\star$

Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n+1$.
2. $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto n+1$.
3. $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto (x+y, x-y)$.

Exercice 3 - Exemples d'image directe et d'image réciproque - *L1/Math Sup* - $\star$

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, et soit $A = [-1,4]$. Déterminer
   (a) l'image directe de A par f ;
   (b) l'image réciproque de A par f.
2. On considère la fonction $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Quelle est l'image directe, par sin, de $\mathbb{R}$? De $[0,2\pi]$? de $[0,\pi/2]$? Quelle est l'image réciproque, par sin, de $[0,1]$? de $[3,4]$? de $[1,2]$?

Exercice 4 - Un exemple avec des fonctions - *L1/Math Sup* - $\star\star$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x/(1+x^2)$.

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1,1]$.
3. Montrer que la restriction $g : [-1,1] \to [-1,1]$, $g(x) = f(x)$ est une bijection.

Exercice 5 - Avec des nombres complexes - *L1/Math Sup* - $\star$

Démontrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C}\backslash\{3\} & \to & \mathbb{C}\backslash\{i\} \\ z & \mapsto & \frac{iz-i}{z+3} \end{array}$$

est une bijection. Déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 6 - Une bijection de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ - *L1/Math Sup* - $\star\star$

Soit $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^*$, $(n,p) \mapsto 2^n(2p+1)$. Démontrer que f est une bijection. En déduire une bijection de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$.

Exercice 7 - Un exemple avec de l'arithmétique - *L1/Math Sup* - $\star\star$

Soit $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}$, $(p,q) \mapsto p + \frac{1}{q}$. f est-elle injective, surjective ?

Exercice 8 - Devinettes... - *L1/Math Sup* - $\star\star\star$

1. Déterminer une bijection de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$.
2. Déterminer une bijection de $\{1/n;\ n \geq 1\}$ dans $\{1/n;\ n \geq 2\}$.
3. Déduire de la question précédente une bijection de $[0,1]$ dans $[0,1[$.
4. Déterminer une bijection de $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

Exercices théoriques

Exercice 9 - Implications... - *L1/Math Sup* - ⋆

On considère 4 ensembles A, B, C et D, et des applications $f : A \to B$, $g : B \to C$ et $h : C \to D$. Montrer que

$$g \circ f \text{ injective} \implies f \text{ injective},$$

$$g \circ f \text{ surjective} \implies g \text{ surjective}.$$

Montrer que :

$$(g \circ f \text{ et } h \circ g \text{ sont bijectives }) \iff (f, g \text{ et } h \text{ sont bijectives}).$$

Exercice 10 - Image directe de l'image réciproque...et vice-versa ! - *L1/Math Sup* - ⋆

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$. Démontrer que

1. $\forall A \in \mathcal{P}(E), A \subset f^{-1}(f(A))$;
2. $\forall B \in \mathcal{P}(F), f(f^{-1}(B)) \subset B$.
3. Question subsidiaire (plus difficile) : a-t-on égalité en général ?

Exercice 11 - Ensembles et images réciproques - *L1/Math Sup* - ⋆

Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \to F$. Soient également A et B deux parties de F.

1. Démontrer que $A \subset B \implies f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$. La réciproque est-elle vraie ?
2. Démontrer que $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
3. Démontrer que $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

Exercice 12 - Ensembles et images directes - *L1/Math Sup* - ⋆

Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \to F$. Soient également A et B deux parties de E.

1. Démontrer que $A \subset B \implies f(A) \subset f(B)$. La réciproque est-elle vraie ?
2. Démontrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. L'inclusion réciproque est-elle vraie ?
3. Démontrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Exercice 13 - Image directe et injectivité - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

Soit $f : X \to Y$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. f est injective.
2. Pour tous A, B de X, on a $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Exercice 14 - Caractérisations - *L1/Math Sup* - $\star\star$

Soient X, Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une application.

1. Montrer que f est injective si et seulement si, pour tout $g : Z \to X$ et tout $h : Z \to X$, on a $f \circ g = f \circ h \implies g = h$.
2. Montrer que f est surjective si et seulement si, pour tout $g : Y \to Z$ et tout $h : Y \to Z$, on a $g \circ f = h \circ f \implies g = h$.

Exercice 15 - Bijectivité et passage au complémentaire - *Math Sup/L1* - $\star\star\star$

Soit $f : E \to F$. Montrer que f est bijective si et seulement si, pour tout A de $\mathcal{P}(E)$, on a $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ ($\overline{A}$ désigne le complémentaire de A).

Exercice 16 - Ensemble des parties - *L1/Math Sup* - $\star\star\star$

Soient E un ensemble, $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de ses parties, et A et B deux parties de E. On définit

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ & X & \mapsto & (X \cap A, X \cap B). \end{array}$$

1. Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
2. Montrer que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que f soit bijective. Donner dans ce cas la bijection réciproque.

Exercice 17 - Fonctions et fonctions d'ensemble - *L1/Math Sup* - $\star\star\star$

Soient E et F deux ensembles, et $f : E \to F$. On définit deux applications $f^\sharp$ et $f_\sharp$ par :

$$\begin{aligned} f^\sharp : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(F), \qquad & f^\sharp(A) = f(A) \\ f_\sharp : \mathcal{P}(F) \to \mathcal{P}(E), \qquad & f_\sharp(A) = f^{-1}(A). \end{aligned}$$

Démontrer que

1. $f^\sharp$ est injective si et seulement si f est injective.
2. $f_\sharp$ est surjective si et seulement si f est injective.