Ensembles et applications

Eléments de logique

Exercice 1 [01481] [correction]
Décrire les parties de $\mathbb{R}$ dans lesquelles évoluent x pour que les assertions suivantes soient vraies :
a) $(x > 0$ et $x < 1)$ ou $x = 0$
b) $x > 3$ et $x < 5$ et $x \neq 4$
c) $(x \leqslant 0$ et $x > 1)$ ou $x = 4$
d) $x \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 2$.

Exercice 2 [01482] [correction]
Etant donné P, Q et R trois assertions, vérifier en dressant la table de vérité :
a) P ou $(Q$ et $R) \sim (P$ ou $Q)$ et $(P$ ou $R)$
b) non$(P \Rightarrow Q) \sim P$ et non(Q).

Exercice 3 [01483] [correction]
On dispose de neuf billes visuellement identiques, huit d'entre elles ont même masse mais la neuvième est plus lourde. Comment, en deux pesées sur une balance à deux plateaux, peut-on démasquer l'intrus ?

Exercice 4 [01484] [correction]
On dispose de neuf billes visuellement identiques, elles ont toutes la même masse sauf une.
Comment, à l'aide d'une balance à deux plateaux, démasquer l'intrus en trois pesées ?

Quantificateurs

Exercice 5 [01485] [correction]
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles.
Exprimer verbalement la signification des assertions suivantes :
a) $\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) = C$
b) $\forall x \in I, f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$
c) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) = y$
d) $\forall x, y \in I, x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$
e) $\forall x, y \in I, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

Exercice 6 [01486] [correction]
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles.
Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :
a) la fonction f s'annule
b) la fonction f est la fonction nulle
c) f n'est pas une fonction constante
d) f ne prend jamais deux fois la même valeur
e) la fonction f présente un minimum
f) f prend des valeurs arbitrairement grandes
g) f ne peut s'annuler qu'une seule fois.

Exercice 7 [01487] [correction]
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles définie sur I.
Exprimer les négations des assertions suivantes :
a) $\forall x \in I, f(x) \neq 0$
b) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) = y$
c) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, |f(x)| \leqslant M$
d) $\forall x, y \in I, x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$
e) $\forall x, y \in I, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
f) $\forall x \in I, f(x) > 0 \Rightarrow x \leqslant 0$.

Exercice 8 [01488] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Quelle différence de sens ont les deux assertions proposées :
a) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y = f(x)$ et $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y = f(x)$.
b) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, y = f(x)$ et $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y = f(x)$.
c) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant M$ et $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant M$?

Exercice 9 [01489] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
On considère les assertions suivantes :

$$P : \text{« } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 \text{ »}, \; Q : \text{« } \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 \text{ »}$$

et

$$R : \text{« } (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < 0) \text{ »}$$

Parmi les implications suivantes lesquelles sont exactes :

a) $P \Rightarrow Q$ b) $Q \Rightarrow P$ c) $Q \Rightarrow R$
d) non$(R) \Rightarrow Q$ e) non$(Q) \Rightarrow$ non(P) f) non$(P) \Rightarrow$ non(R) ?

Exercice 10 [01490] [correction]
Soit $a \in \mathbb{R}$.
a) Montrer que $(\forall \varepsilon \geqslant 0, |a| \leqslant \varepsilon) \Rightarrow a = 0$.
b) Montrer que $(\forall \varepsilon > 0, |a| \leqslant \varepsilon) \Rightarrow a = 0$.

Ensembles

Exercice 11 [01491] [correction]
Soit $E = \{a, b, c\}$ un ensemble. Peut-on écrire :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } a \in E & \text{b) } a \subset E & \text{c) } \{a\} \subset E \\ \text{d) } \emptyset \in E & \text{e) } \emptyset \subset E & \text{f) } \{\emptyset\} \subset E\,? \end{array}$$

Exercice 12 [01492] [correction]
Un ensemble est dit décrit en compréhension lorsqu'il réunit les éléments d'un ensemble vérifiant une propriété. Un ensemble est dit décrit en extension lorsqu'on cite ses éléments. Par exemple, $\{n \in \mathbb{Z} / \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k\}$ et $\{2k / k \in \mathbb{Z}\}$ sont des descriptions respectivement en compréhension et en extension de l'ensemble des entiers pairs.
a) Décrire en compréhension et en extension l'ensemble $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$.
b) Décrire en compréhension et en extension l'ensemble $\{1, 10, 100, 1000, \ldots\}$.
c) Décrire en extension l'ensemble des nombres rationnels.
d) Décrire en compréhension l'ensemble $]0, 1]$.
e) Décrire en compréhension et en extension l'ensemble des valeurs prises par une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
f) Décrire en compréhension l'ensemble des antécédents d'un réel y par une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Exercice 13 [01493] [correction]
Décrire $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a\}))$ où a désigne un élément.

Exercice 14 [01494] [correction]
Soient $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Etablir

$$A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$$

Exercice 15 [01495] [correction]
Etant donné A et B deux parties de E, justifier

$$C_E A \backslash C_E B = B \backslash A$$

Exercice 16 [01496] [correction]
Etant donné A, B et C trois parties de E, justifier les équivalences suivantes :
a) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$.
b) $A = B \Leftrightarrow A \cap B = A \cup B$.
c) $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C$
d) $\begin{cases} A \cup B = A \cup C \\ A \cap B = A \cap C \end{cases} \Leftrightarrow B = C$

Exercice 17 [01497] [correction]
Soient A et B deux parties de E, on appelle différence symétrique de A et B, l'ensemble

$$A \,\Delta\, B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$$

Montrer

$$A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$$

Exercice 18 [01498] [correction]
Etant donné A, B et C trois parties d'un ensemble E, montrer que :
a) $A \Delta B = A \Delta C \Leftrightarrow B = C$
b) $A \backslash B = A \Leftrightarrow B \backslash A = B$
c) $A \Delta B = A \cap B \Rightarrow A = B = \emptyset$.

Exercice 19 [01499] [correction]
Soient A, B deux parties de E.
Discuter et résoudre l'équation $A \cup X = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$.

Exercice 20 [01500] [correction]
Soient A, B deux parties de E.
Discuter et résoudre l'équation $A \cap X = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$.

Injectivité, surjectivité et bijectivité

Exercice 21 [01501] [correction]
Soient $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ les applications définies par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, f(k) = 2k \text{ et } g(k) = \begin{cases} k/2 & \text{si } k \text{ est pair} \\ (k-1)/2 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

a) Etudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f et de g.
b) Préciser les applications $g \circ f$ et $f \circ g$.
Etudier leur injectivité, surjectivité et bijectivité.

Exercice 22 [01502] [correction]
Soient a, b et c trois réels tels que $c \neq 0$ et $a^2 + bc \neq 0$.
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \backslash \{a/c\} \to \mathbb{R} \backslash \{a/c\}$ définie par $f(x) = \frac{ax+b}{cx-a}$.
Justifier que l'application f est bien définie.
Calculer $f \circ f$, en déduire que f est une permutation dont on déterminera l'application réciproque.

Exercice 23 [01503] [correction]
Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie par

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que f est bien définie et bijective.

Exercice 24 [01504] [correction]
Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Etablir les implications suivantes :
a) $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective.
b) $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective
c) $g \circ f$ injective et f surjective $\Rightarrow g$ injective.
d) $g \circ f$ surjective et g injective $\Rightarrow f$ surjective.

Exercice 25 [01505] [correction]
Soient E, F, G trois ensembles, $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to E$
Etablir que si $h \circ g \circ f$ est injective et que $g \circ f \circ h$ et $f \circ h \circ g$ sont surjectives alors f, g et h sont bijectives.

Exercice 26 [01506] [correction]
Soient E un ensemble et $f : E \to E$ telle que $f \circ f \circ f = f$.
Montrer que f est injective si, et seulement si, f est surjective.

Exercice 27 [01507] [correction]
Soient $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux applications telles que $f \circ g \circ f$ soit bijective.
Montrer que f et g sont bijectives

Exercice 28 [01508] [correction]
Soient E, F, G trois ensembles, $f_1, f_2 : E \to F$ et $g : F \to G$.
On suppose $g \circ f_1 = g \circ f_2$ et g injective. Montrer que $f_1 = f_2$.

Exercice 29 [01509] [correction]
Soient E, F, G trois ensembles, $f : E \to F$ et $g_1, g_2 : F \to G$.
On suppose f surjective et $g_1 \circ f = g_2 \circ f$. Montrer que $g_1 = g_2$.

Exercice 30 [01510] [correction]
Soit $f : E \to I$ une application surjective. On pose, pour tout $i \in I$, $A_i = f^{-1}(\{i\})$.
Montrer que les A_i sont non vides, deux à deux disjoints, de réunion égale à E.

Exercice 31 [01511] [correction]
Soient A et B deux parties d'un ensemble E et

$$f : \begin{cases} \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X \mapsto (X \cap A, X \cap B) \end{cases}$$

Montrer que :
a) f est injective si, et seulement si, $A \cup B = E$
b) f est surjective si, et seulement si, $A \cap B = \emptyset$.

Image directe et image réciproque d'une partie

Exercice 32 [01512] [correction]
Décrire l'image directe de $\mathbb{R}$ par la fonction exponentielle.
Déterminer l'image réciproque de l'intervalle $[-1, 4]$ par la fonction $f : x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 33 [01513] [correction]
Soit $f : E \to F$ une application.
a) Montrer

$$\forall A, A' \in \mathcal{P}(E),\ f(A \cup A') = f(A) \cup f(A') \text{ et } f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$$

b) Montrer

$$\forall B, B' \in \mathcal{P}(F),\ f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B') \text{ et } f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$$

Exercice 34 [01514] [correction]
Soit $f : E \to F$ une application.
Etablir

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), A \subset f^{-1}(f(A)) \text{ et } \forall B \in \mathcal{P}(F), f(f^{-1}(B)) \subset B$$

Exercice 35 [01515] [correction]
Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$.
Montrer que f est injective si, et seulement si,

$$\forall A, A' \in \wp(E), f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$$

Exercice 36 [01516] [correction]
Soit $f : E \to F$ une application. Montrer que :
a) f est injective $\Leftrightarrow \forall A \in \wp(E), A = f^{-1}(f(A))$.
b) f est surjective $\Leftrightarrow \forall B \in \wp(F), f(f^{-1}(B)) = B$.

Exercice 37 [01517] [correction]
Soit $f : E \to F$ une application. Montrer que :
f est bijective si, et seulement si,

$$\forall A \in \wp(E), f(C_E A) = C_F f(A)$$

Ensembles ordonnés

Exercice 38 [01518] [correction]
On définit une relation binaire $\preccurlyeq$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$ par :

$$x \preccurlyeq y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, y = x^n$$

Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre. Cet ordre est-il total ?

Exercice 39 [01519] [correction]
Soit $\preccurlyeq$ la relation définie sur $E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \leqslant y\right\}$ par

$$(x, y) \preccurlyeq (x', y') \Leftrightarrow (x, y) = (x', y') \text{ ou } y \leqslant x'$$

Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur E.

Exercice 40 [01520] [correction]
On définit une relation binaire $\preccurlyeq$ sur $\{z \in \mathbb{C}/\mathrm{Im}(z) \geqslant 0\}$ par :

$$z \preccurlyeq z' \Leftrightarrow |z| < |z'| \text{ ou } (|z| = |z'| \text{ et } \mathrm{Re}(z) \leqslant \mathrm{Re}(z'))$$

Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre total.

Exercice 41 [01521] [correction]
Soit E l'ensemble des couples (I, f) formé d'un intervalle I et d'une fonction réelle définie sur I.
On définit une relation $\preccurlyeq$ sur E par : $(I, f) \preccurlyeq (J, g) \Leftrightarrow I \subset J$ et $g_{\restriction I} = f$.
Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur E.

Exercice 42 [01522] [correction]
Soient E un ensemble et $f : E \to \mathbb{R}$ une application injective.
On définit sur E une relation binaire $\preccurlyeq$ par

$$x \preccurlyeq y \Leftrightarrow f(x) \leqslant f(y)$$

Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur E.

Exercice 43 [01523] [correction]
Soient A, B deux parties d'un ensemble E ordonné par $\preccurlyeq$.
On suppose que A et B ont chacun un plus grand élément.
Qu'en est-il de $A \cup B$ lorsque l'ordre est total ? lorsqu'il ne l'est pas ?
Que dire de $A \cap B$?

Exercice 44 [01524] [correction]
Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné tel que toute partie non vide admet un plus petit élément et un plus grand élément.
Montrer que E est fini.

Exercice 45 [01525] [correction]
Soit E un ensemble ordonné par une relation $\leqslant$.
Un tableau à n lignes et p colonnes est formé d'éléments $a_{i,j} \in E$ avec i indice de ligne ($1 \leqslant i \leqslant n$) et j indice de colonne ($1 \leqslant j \leqslant p$).
On note le plus petit élément de chaque colonne et l'on prend le plus grand de ces plus petits :

$$\max_{1\leqslant j\leqslant p}\left(\min_{1\leqslant i\leqslant n} a_{i,j}\right)$$

On note aussi le plus grand élément de chaque ligne et l'on prend le plus petit de ces plus grands :

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\max_{1\leqslant j\leqslant p} a_{i,j}\right)$$

a) Comparer ces deux nombres.
b) Donner un exemple de non égalité.

Les ensembles finis

Exercice 46 [01526] [correction]
Soient E un ensemble fini, F un ensemble quelconque et $f : E \to F$ une application.
Montrer

$$f \text{ est injective si, et seulement si, } \mathrm{Card}(f(E)) = \mathrm{Card}(E)$$

Exercice 47 [01527] [correction]
Soient A, B et C trois parties d'un ensemble finie E. Exprimer $\mathrm{Card}(A \cup B \cup C)$ en fonctions des cardinaux de $A, B, C, A \cap B, B \cap C, C \cap A$ et $A \cap B \cap C$.

Exercice 48 [01528] [correction]
Soient A et B deux parties de E et F.
Etant donnée une application $f : E \to F$, est-il vrai que :
a) Si A est une partie finie de E alors $f(A)$ est une partie finie de F.
b) Si $f(A)$ est une partie finie de F alors A est une partie finie de E.
c) Si B est une partie finie de F alors $f^{-1}(B)$ est une partie finie de E.
d) Si $f^{-1}(B)$ est une partie finie de E alors B est une partie finie de F ?

Exercice 49 [03044] [correction]
Soit E un ensemble. Montrer que E est infini si, et seulement si, pour toute fonction $f : E \to E$, il existe $A \subset E$ avec $A \neq \emptyset$ et $A \neq E$ telle que $f(A) \subset A$.

Dénombrement

Exercice 50 [01529] [correction]
Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et p.
Combien y a-t-il d'injections de E dans F ?

Exercice 51 [01530] [correction]
Soient $E = \{1, \dots, n\}$ et $F = \{1, \dots, p\}$ avec $n \leqslant p \in \mathbb{N}$.
Combien y a-t-il d'applications strictement croissantes de E vers F ?

Exercice 52 [01531] [correction]
Combien existe-t-il de relation d'ordre total sur un ensemble E à n éléments ?

Exercice 53 [01532] [correction]
On trace dans un plan n droites en position générale (i.e. deux d'entre elles ne sont jamais parallèles ni trois d'entre elles concourantes). Combien forme-t-on ainsi de triangles ?

Exercice 54 [01533] [correction]
[Formule de Chu-Vandermonde]
Soient $p, q \in \mathbb{N}$ et $n \in [\![0, p+q]\!]$. Proposer une démonstration par dénombrement de l'égalité

$$\binom{p+q}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k}$$

Exercice 55 [01534] [correction]
Soient E et F deux ensembles finis non vides de cardinaux respectifs n et p.
On note S_n^p le nombre de surjections de E sur F.
a) Calculer S_n^1, S_n^n et S_n^p pour $p > n$.
b) On suppose $p \leqslant n$ et on considère a un élément de E.
On observant qu'une surjection de E sur F réalise, ou ne réalise pas, une surjection de $E \backslash \{a\}$ sur F, établir

$$S_n^p = p(S_{n-1}^{p-1} + S_{n-1}^p)$$

c) En déduire que pour tout $n \geqslant 1$ et tout $p \geqslant 1$

$$S_n^p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n$$

Exercice 56 [01535] [correction]
Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et $p \in \mathbb{N}$, on note Σ_n^p le nombre de n uplets $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n$ tels que $x_1 + \cdots + x_n = p$.
a) Déterminer $\Sigma_n^0, \Sigma_n^1, \Sigma_n^2, \Sigma_1^p$ et Σ_2^p.
b) Etablir

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \forall p \in \mathbb{N}, \Sigma_{n+1}^p = \Sigma_n^0 + \Sigma_n^1 + \cdots + \Sigma_n^p$$

c) En déduire que

$$\Sigma_n^p = \binom{n+p-1}{p}$$

Exercice 57 [01536] [correction]
Soit E un ensemble à n éléments.
a) Soit X une partie à p éléments de E.
Combien y a-t-il de parties Y de E disjointes de X ?
b) Combien y a-t-il de couples (X, Y) formés de parties disjointes de E ?

Exercice 58 [01537] [correction]
Soit E un ensemble à n éléments. Combien y a-t-il de parties X et Y de E telles que $X \subset Y$?

Exercice 59 [01538] [correction]
Soit A une partie d'un ensemble E à n éléments. On pose $p = \operatorname{Card} A$.
a) Combien y a-t-il de parties X de E contenant A ?
b) Combien y a-t-il de parties X de E à $m \in \{p, \ldots, n\}$ éléments contenant A ?
c) Combien y a-t-il de couples (X, Y) de parties de E tels que $X \cap Y = A$?

Exercice 60 [01539] [correction]
Soit E un ensemble à n éléments. Calculer

$$\sum_{X \subset E} \operatorname{Card}(X) \text{ et } \sum_{X, Y \subset E} \operatorname{Card}(X \cap Y)$$

Exercice 61 [01540] [correction]
Combien y a-t-il de p-cycles dans le groupe $(\mathcal{S}_n, \circ)$?

Exercice 62 [03930] [correction]
Soient $n, p \in \mathbb{N}$ et $E = \{1, \ldots, n\}$.
a) Combien y a-t-il de suites strictement croissantes $(x_1, \ldots, x_p)$ d'éléments de E ?
b) Combien y a-t-il de suites croissantes au sens large $(x_1, \ldots, x_p)$ d'éléments de E ?
c) En déduire le nombre de suites $(a_1, \ldots, a_p)$ de naturels vérifiant

$$a_1 + \cdots + a_p \leqslant n$$

d) Même question avec la condition

$$a_1 + \cdots + a_p = n$$

Exercice 63 [03933] [correction]
a) Quel est le coefficient de $a^2 b^5 c^3$ dans le développement de $(a + b + c)^{10}$?
b) Même question avec $a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_p^{k_p}$ dans $(a_1 + a_2 + \cdots + a_p)^n$.

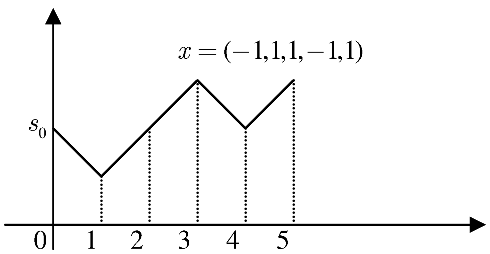
Exercice 64 [03934] [correction]
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On note X l'ensemble de suites $(x_1, \ldots, x_n)$ avec

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\}, x_k = 1 \text{ ou } -1$$

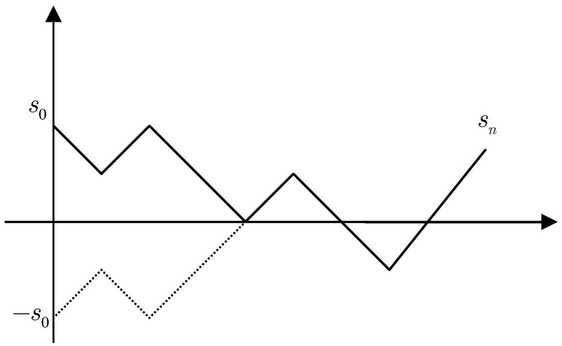
A chaque suite $x = (x_1, \ldots, x_n)$ élément de X on associe la suite $(s_0, s_1, \ldots, s_n)$ avec

$$s_0 \in \mathbb{Z} \text{ et } s_k = s_{k-1} + x_k \text{ pour } k \in \{1, \ldots, n\}$$

Celle-ci détermine une ligne brisée déterminée par les points de coordonnées (k, s_k) comme illustrée ci-dessous



Cette ligne brisée définit un chemin joignant $(0, s_0)$ à (n, s_n).
a) On note p le nombre de 1 dans la suite $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$. Exprimer en fonction de n, p et s_0 la valeur de s_n.
b) Etant donnée $m \in \mathbb{N}$, combien existe-t-il de chemin $s_n = m$?
c) On suppose $s_0 \in \mathbb{N}$. En exploitant la figure ci-dessous



expliquer pourquoi il y a autant de chemins joignant $(0, -s_0)$ à (n, m) que de chemins joignant $(0, s_0)$ à (n, m) et coupant l'axe des abscisses.
d) En déduire le nombre de chemins joignant $(0, 1)$ à (n, m) dont tous les points sont d'ordonnées strictement positives.

Exercice 65 [03963] [correction]
On note d_n le nombre de permutations σ de $[\![1, n]\!]$ vérifiant

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \sigma(k) \neq k$$

On dit σ est un dérangement de $[\![1, n]\!]$. On convient $d_0 = 1$.
a) Etablir

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k}$$

b) En déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}, d_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k!$$

Exercice 66 [03985] [correction]
On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$ et $\mathcal{S}_n(k)$ le sous-ensemble de $\mathcal{S}_n$ constitué des permutations possédant exactement $k \in [\![0, n]\!]$ points fixes. Enfin, on pose

$$s_n(k) = \text{Card}(\mathcal{S}_n(k))$$

a) Calculer

$$\sum_{k=0}^{n} s_n(k)$$

b) Soient $n, k \geqslant 1$. En calculant de deux façons le nombre de couples (s, x) constitués de $s \in \mathcal{S}_n(k)$ et x point fixe de s, établir

$$ks_n(k) = ns_{n-1}(k-1)$$

c) En déduire

$$s_n(k) = \binom{n}{k} s_{n-k}(0)$$

d) Retrouver directement le résultat précédent.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
a) $[0,1[$
b) $]3,4[\cup]4,5[$
c) $\{4\}$
d) $]-\infty,0[\cup[2,+\infty[$ (et il n'y a pas d'erreurs !)

Exercice 2 : [énoncé]
a) Dans les deux cas on obtient la table

P	v	v	v	v	f	f	f	f
Q	v	v	f	f	v	v	f	f
R	v	f	v	f	v	f	v	f
	v	v	v	v	v	f	f	f

b) Dans les deux cas on obtient la table

P	v	v	f	f
Q	v	f	v	f
	f	v	f	f

Exercice 3 : [énoncé]
On compare deux paquets de trois billes.
Si l'un est plus lourd que l'autre, c'est qu'il contient l'intrus.
Sinon, l'intrus est parmi les trois billes restantes.
Ainsi, on sait dans quel paquet de trois billes se situe l'intrus.
Dans ce celui-ci, on compare deux billes.
Si l'une est plus lourde que l'autre, c'est l'intrus.
Sinon, l'intrus est la troisième.

Exercice 4 : [énoncé]
L'exercice serait facile à résoudre en deux pesées si l'on savait si la bille différente était plus lourde ou plus légère que les autres. Ignorant ce fait, l'exercice devient d'autant plus croustillant...
Notons 1,2,3,4,5,6,7,8,9 nos billes.
On commence par comparer 2 lots constituées de 1,2,3 et de 4,5,6.
Si ceux-ci ont même masse alors l'intrus figure parmi 7,8,9 et l'on peut utiliser la bille 1 comme bille témoin. On compare alors les billes 1 et 7 puis les billes 1 et 8 pour démasquer l'intrus.
Si en revanche les deux premiers lots n'ont pas même masse, l'intrus se trouve parmi l'un deux. La bille 9 servira alors de bille témoin. Pour fixer les idées (et sans perte de généralités), supposons que le premier lot est plus lourd que le second. Comparons maintenant les billes 1 et 4 avec les billes 2 et 5.
Si celles-ci ont même masse commune, l'intrus se trouve dans les deux autres billes 3 et 6. Une comparaison de 3 avec 9 permet alors de savoir qui est l'intrus de 3 ou de 6.
Si celles-ci n'ont pas même masse commune, pour fixer les idées (et sans perte de généralités), supposons que 1 et 4 soient plus lourdes que 2 et 5.
Si l'intrus est plus lourd que ses congénères alors cela ne peut ni être 4 ni être 2 à cause respectivement des première et deuxième pesées.
Si l'intrus est plus léger que ses congénères alors cela ne peut ni être 2 ni être 4 à cause respectivement des première et deuxième pesées.
Dans tous les cas l'intrus est soit 1, soit 5.
Une comparaison de la bille 1 avec la bille 9 permet alors de démasquer cet intrus.

Exercice 5 : [énoncé]
a) la fonction f est constante
b) la fonction f ne peut s'annuler qu'en 0 (mais n'y est pas forcée de s'y annuler)
c) la fonction f prend toute valeur réelle
d) la fonction f est croissante
e) la fonction f ne prend jamais deux fois la même valeur

Exercice 6 : [énoncé]
a) $\exists x\in I, f(x)=0$
b) $\forall x\in I, f(x)=0$
c) $\exists x,y\in I, f(x)\neq f(y)$
d) $\forall x,y\in I, x\neq y\Rightarrow f(x)\neq f(y)$ ou $\forall x,y\in I, f(x)=f(y)\Rightarrow x=y$
e) $\exists a\in I,\forall x\in I, f(x)\geqslant f(a)$
f) $\forall M\in\mathbb{R},\exists x\in I, f(x)>M$
g) $\forall x,y\in I, f(x)=0$ et $f(y)=0\Rightarrow x=y$.

Exercice 7 : [énoncé]
a) $\exists x\in I, f(x)=0$
b) $\exists y\in\mathbb{R},\forall x\in I, f(x)\neq y$
c) $\forall M\in\mathbb{R},\exists x\in I,|f(x)|>M$
d) $\exists x,y\in I, x\leqslant y$ et $f(x)>f(y)$
e) $\exists x,y\in I, f(x)=f(y)$ et $x\neq y$
f) $\exists x\in I, f(x)>0$ et $x>0$.

Exercice 8 : [énoncé]
a) la première assertion est vérifiée par toute application, la seconde signifie f constante.
b) la première assertion signifie que f prend toute valeur dans $\mathbb{R}$, la seconde est absurde.
c) la première est toujours vérifiée, la seconde signifie que f est majorée.

Exercice 9 : [énoncé]
a) d) e) sont les assertions exactes

Exercice 10 : [énoncé]
a) Supposons $\forall\varepsilon \geqslant 0, |a| \leqslant \varepsilon$. En particulier, pour $\varepsilon = 0$, on a $|a| \leqslant 0$ donc $a = 0$.
b) Par contraposée, montrons : $a \neq 0 \Rightarrow \exists\varepsilon > 0, |a| > \varepsilon$.
Supposons $a \neq 0$. Pour $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$ on a $\varepsilon > 0$ et $|a| > \varepsilon$ ce qui détermine un ε convenable.

Exercice 11 : [énoncé]
On peut écrire : a), c), e).

Exercice 12 : [énoncé]
a) $\{1,3,5,7\} = \{n \in \mathbb{N}/\exists k \in \mathbb{N}, n = 2k+1\} = \{2k+1/k \in \mathbb{N}\}$.
b) $\{1,10,100,1000,\ldots\} = \left\{x \in \mathbb{R}/\exists k \in \mathbb{N}, x = 10^k\right\} = \left\{10^k/k \in \mathbb{N}\right\}$.
c) $\mathbb{Q} = \{p/q \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^\star\}$.
d) $]0,1] = \{x \in \mathbb{R}/0 < x \leqslant 1\}$.
e) $\{y \in \mathbb{R}/\exists x \in \mathbb{R}, y = f(x)\} = \{f(x)/x \in \mathbb{R}\}$.
f) $\{x \in \mathbb{R}/f(x) = y\}$.

Exercice 13 : [énoncé]
$\mathcal{P}(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a\})) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{a\}\}, \{\emptyset, \{a\}\}\}$.

Exercice 14 : [énoncé]
$A\backslash(B \cap C) = A \cap C_E(B \cap C) = (A \cap C_E B) \cup (A \cap C_E C) = (A\backslash B) \cup (A\backslash C)$

Exercice 15 : [énoncé]
Puisque la privation correspond à l'intersection avec le complémentaire

$$C_E A\backslash C_E B = C_E A \cap C_E C_E B = B \cap C_E A = B\backslash A$$

Exercice 16 : [énoncé]
a) $(\Rightarrow)$ Supposons $A \subset B$. On a toujours $B \subset A \cup B$.
Pour $x \in A \cup B$. Que $x \in A$ ou $x \in B$ on a $x \in B$ donc $A \cup B \subset B$. Ainsi $A \cup B = B$.
$(\Leftarrow)$ Supposons $A \cup B = B$. Puisque $A \subset A \cup B$, on a $A \subset B$.
b) $(\Rightarrow)$ Supposons $A = B$. On a $A \cap B = A = A \cup B$.
$(\Leftarrow)$ Supposons $A \cap B = A \cup B$. On a $A \subset A \cup B \subset A \cap B \subset B$ et de même $B \subset A$ donc $A = B$.
c) $(\Rightarrow)$ Supposons $A \cup B = A \cap C$.
On a $B \subset A \cup B = A \cap C \subset A \subset A \cup B = A \cap C \subset C$.
$(\Leftarrow)$ Supposons $B \subset A \subset C$. $A \cup B = A = A \cap C$.
d) $(\Rightarrow)$ Supposons $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$.
Soit $x \in B$.
Si $x \in A$ alors $x \in A \cap B = A \cap C$ donc $x \in C$.
Si $x \notin A$ alors sachant $x \in A \cup B$ on a $x \in A \cup C$, or $x \notin A$ donc $x \in C$.
Dans les deux cas $x \in C$. Ainsi $B \subset C$ et de manière symétrique $C \subset B$ d'où l'égalité.
$(\Leftarrow)$ Si $B = C$ alors clairement $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$.

Exercice 17 : [énoncé]
Soit $x \in E$.
$x \in A\Delta B \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \notin B) \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \notin A)$
$\Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ et } (x \in A \text{ ou } x \notin A) \text{ et } (x \notin B \text{ ou } x \in B) \text{ et } (x \notin B \text{ ou } x \notin A)$
$\Leftrightarrow x \in A \cup B \text{ et } x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \in (A \cup B)\backslash(A \cap B)$
d'où l'égalité des ensembles.

Exercice 18 : [énoncé]
a) Si $A\Delta B = A\Delta C$ alors pour tout $x \in B$:
Si $x \in A$ alors $x \notin A\Delta B$ et donc $x \notin A\Delta C$ et puisque $x \in A$, $x \in C$.
Si $x \notin A$ alors $x \in A\Delta B$ et donc $x \in A\Delta C$ et puisque $x \notin A$, $x \in C$.
Dans les deux cas $x \in C$. Ainsi $B \subset C$ et un raisonnement symétrique donne $C \subset B$ puis l'égalité.
Réciproque immédiate.

b) $A\backslash B = A \Leftrightarrow A \cap C_E B = A \Leftrightarrow A \subset C_E B$ or $A \subset C_E B \Leftrightarrow B \subset C_E A$ et donc $A\backslash B = A \Leftrightarrow B\backslash A = B$.
c) $A\Delta B = (A \cup B)\backslash(A \cap B)$ donc
$A\Delta B = A \cap B \Rightarrow A \cap B = \emptyset = A \cup B \Rightarrow A = B = \emptyset$.

Exercice 19 : [énoncé]
Si $A \not\subset B$ il est clair que l'équation n'a pas de solutions. $\mathcal{S} = \emptyset$.
Si $A \subset B$ alors $A \cup X = B \Rightarrow X \subset B$ et $B\backslash A \subset X$. Inversement ok
Ainsi $\mathcal{S} = \{X \in \wp(E)/B\backslash A \subset X \subset B\}$

Exercice 20 : [énoncé]
Si $B \not\subset A$ alors l'équation n'a pas de solution.
Si $B \subset A$. Soit X une solution de l'équation.
On a $X = (A \cap X) \cup (\bar{A} \cap X) = B \cup C$ avec $C = \bar{A} \cap X \subset \bar{A}$.
Inversement, pour $X = B \cup C$ avec $C \subset \bar{A}$, $A \cap X = (A \cap B) \cup (A \cap C) = B$.
Ainsi $\mathcal{S} = \left\{X = B \cup C/C \subset \bar{A}\right\} = \left\{X \in \mathcal{P}(E)/B \subset X \subset B \cup \bar{A}\right\}$.

Exercice 21 : [énoncé]
a) On a

k	0	1	2	3	...
$f(k)$	0	2	4	6	...

et

k	0	1	2	3	...
$g(k)$	0	0	1	1	...

f est injective car $2k = 2k' \Rightarrow k = k'$ mais non surjective car les nombres impairs ne sont pas des valeurs prises.
g est surjective car $2y$ est un antécédent de y mais non injective car un nombre pair et l'impair qui le suit prennent même valeur par g.
b) D'une part

$$(g \circ f)(k) = k$$

donc $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.
D'autre part

$$(f \circ g)(k) = \begin{cases} k & \text{si } k \text{ est pair} \\ k-1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$g \circ f$ est bijective. $f \circ g$ n'est ni injective, ni surjective.

Exercice 22 : [énoncé]
f est bien définie sur $\mathbb{R}\backslash\{a/c\}$ car le dénominateur ne s'y annule pas.

$$f(x) = \frac{a}{c} \Leftrightarrow (ax+b)c = a(cx-a) \Leftrightarrow a^2 + bc = 0$$

qui est exclu, donc f est à valeurs dans $\mathbb{R}\backslash\{a/c\}$.
Par calculs

$$(f \circ f)(x) = \cdots = x \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}\backslash\{a/c\}$$

Puisque $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}\backslash\{a/c\}}$, f est une involution, c'est donc une permutation et $f^{-1} = f$.

Exercice 23 : [énoncé]
Soit $n \in \mathbb{N}$.
Si n est pair alors $f(n) = n/2 \in \mathbb{Z}^+$ et si n est impair alors $f(n) = -(n+1)/2 \in \mathbb{Z}^{-\star}$.
Dans les deux cas $f(n) \in \mathbb{Z}$.
Soient $n, n' \in \mathbb{N}$. Supposons $f(n) = f(n')$.
Compte tenu de la remarque précédente, n et n' ont nécessairement même parité.
Si n et n' sont pairs alors $n/2 = n'/2$ donc $n = n'$.
Si n et n' sont impairs alors $-(n+1)/2 = -(n'+1)/2$ donc $n = n'$.
Ainsi f est injective.
Soit $m \in \mathbb{Z}$.
Si $m \geqslant 0$ alors pour $n = 2m \in \mathbb{N}$ on a $f(n) = \frac{2m}{2} = m$.
Si $m < 0$ alors pour $n = -2m - 1 \in \mathbb{N}$ on a $f(n) = \frac{2m}{2} = m$.
Ainsi f est surjective.
Finalement f est bijective.

Exercice 24 : [énoncé]
a) Supposons $g \circ f$ injective.
Soient $x, x' \in E$. Si $f(x) = f(x')$ alors $g(f(x)) = g(f(x'))$. Or $g \circ f$ injective, donc $x = x'$.
Ainsi f injective.
b) Supposons $g \circ f$ surjective.
Soit $z \in G$. Il existe $x \in E$ tel que $z = g(f(x))$. Pour $y = f(x) \in F$, on a $g(y) = z$.
Ainsi g surjective.
c) Supposons $g \circ f$ injective et f surjective.
Par a), on a f injective et donc f bijective. Introduisons f^{-1}.
$g = (g \circ f) \circ f^{-1}$ est injective par composition d'applications injectives.
d) Supposons $g \circ f$ surjective et g injective.
Par b), on a g surjective donc g bijective. Introduisons g^{-1}.
$f = g^{-1} \circ (g \circ f)$ est surjective par composition d'applications surjectives.

Exercice 25 : [énoncé]
Supposons $h \circ g \circ f$ injective et $g \circ f \circ h$ ainsi que $f \circ h \circ g$ surjectives.
Puisque $(h \circ g) \circ f$ est injective, on a f injective.
Puisque $f \circ (h \circ g)$ est surjective, on a f surjective.
Par suite f est bijective et on peut introduire f^{-1}.
Par composition $h \circ g = (h \circ g \circ f) \circ f^{-1}$ est injective et par suite g est injective.
D'autre part $g \circ f \circ h$ est surjective et donc g aussi. Finalement g est bijective.
Par composition $h = (h \circ g) \circ g^{-1}$ est injective et $h = f^{-1} \circ (f \circ h \circ g) \circ g^{-1}$ est surjective donc h est bijective.

Exercice 26 : [énoncé]
Supposons f injective.
Soit $y \in E$. On a $f((f \circ f)(y)) = f(y)$, or f est injective donc $(f \circ f)(y) = y$.
Pour $x = f(y) \in E$ on a $f(x) = f(f(y)) = y$. Finalement f est surjective.
Supposons f surjective.
Soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$.
Puisque f est surjective, $f \circ f$ l'est aussi et donc $\exists a, a' \in E$ tels que $x = (f \circ f)(a)$ et $x' = (f \circ f)(a')$.
La relation $f(x) = f(x')$ donne alors $(f \circ f \circ f)(a') = (f \circ f \circ f)(a')$ d'où $f(a) = f(a')$ puis $x = f(f(a)) = f(f(a')) = x'$. Finalement f est injective.

Exercice 27 : [énoncé]
Par l'exercice précédent, $f \circ g \circ f$ bijective implique f injective et f surjective.
Ainsi f est bijective et on peut introduire f^{-1}.
$g = f^{-1} \circ (f \circ g \circ f) \circ f^{-1}$ est bijective par composition d'applications bijectives.

Exercice 28 : [énoncé]
$\forall x \in E$ on a $(g \circ f_1)(x) = (g \circ f_2)(x)$ i.e. $g(f_1(x)) = g(f_2(x))$ donc $f_1(x) = f_2(x)$.
Ainsi $f_1 = f_2$.

Exercice 29 : [énoncé]
$\forall y \in F, \exists x \in E$ tel que $y = f(x)$ et alors $g_1(y) = (g_1 \circ f)(x) = (g_2 \circ f)(x) = g_2(y)$ donc $g_1 = g_2$.

Exercice 30 : [énoncé]
Puisque f est surjective, les A_i sont non vides.
Si $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ alors pour $x \in A_i \cap A_j$ on a $f(x) = i$ et $f(x) = j$ donc $i = j$.
Par contraposée : $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$.
Soient $x \in E$ et $i = f(x)$. On a $x \in A_i$. Ainsi $E \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ puis l'égalité.

Exercice 31 : [énoncé]
a) Supposons f injective. $f(E) = (A, B) = f(A \cup B)$ donc $E = A \cup B$.
Supposons $A \cup B = E$. Soient $X, Y \in \mathcal{P}(E)$.
Si $f(X) = f(Y)$ alors $(X \cap A, X \cap B) = (Y \cap A, Y \cap B)$ donc $X = X \cap E = X \cap (A \cup B) = (X \cap A) \cup (X \cap B) = (Y \cap A) \cup (Y \cap B) = Y \cap (A \cup B) = Y \cap E = Y$.
Ainsi f est injective.
b) Supposons f surjective. L'élément $(A, \emptyset)$ possède un antécédent $X \in \mathcal{P}(E)$.
On a $A \cap B = (X \cap A) \cap B = A \cap (X \cap B) = A \cap \emptyset = \emptyset$.
Supposons $A \cap B = \emptyset$.
Soit $(A', B') \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$. Pour $X = A' \cup B'$, on a
$f(X) = ((A' \cap A) \cup (B' \cap A), (A' \cap B) \cup (B' \cap B)) = (A', B')$ car $A' \cap A = A'$, $B' \cap A = \emptyset$.

Exercice 32 : [énoncé]
$\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{+\star}$ et $f^{-1}([-1, 4]) = [-2, 2]$.

Exercice 33 : [énoncé]
a) Soit $y \in f(A \cup A')$. Il existe $x \in A \cup A'$ tel que $y = f(x)$.
Si $x \in A$ alors $y \in f(A)$. Sinon, $x \in A'$ et $y \in f(A')$. Dans les deux cas $y \in f(A) \cup f(A')$.
Inversement, soit $y \in f(A) \cup f(A')$. Si $y \in f(A)$ alors il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$.
Or $x \in A \subset A \cup A'$ donc $y \in f(A \cup A')$. De même si $y \in f(A')$.
Par double inclusion, l'égalité.
Soit $y \in f(A \cap A')$. Il existe $x \in A \cap A'$ tel que $y = f(x)$.
Puisque $x \in A \cap A'$, on a $x \in A$ donc $y \in f(A)$. De même $y \in f(A')$ donc $y \in f(A) \cap f(A')$.
b) Soit $x \in E$.

$$x \in f^{-1}(B \cup B') \Leftrightarrow f(x) \in B \cup B' \Leftrightarrow f(x) \in B \text{ ou } f(x) \in B'$$

$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B) \text{ ou } x \in f^{-1}(B') \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$$

D'où la première égalité. La seconde égalité s'établit par la même démonstration, en changeant union en intersection et « et »en « ou ».

Exercice 34 : [énoncé]
Soit $x \in A$. On a $f(x) \in f(A)$ donc $x \in f^{-1}(f(A))$. Ainsi $A \subset f^{-1}(f(A))$.
Soit $y \in f(f^{-1}(B))$. Il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$. Or, puisque $x \in f^{-1}(B)$, on a $f(x) \in B$ i.e. $y \in B$. Ainsi $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

Exercice 35 : [énoncé]
Supposons f injective.
Soient $A, A' \in \wp(E)$. On sait déjà $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$.
Soit $y \in f(A) \cap f(A')$. Il existe $x \in A$ et $x' \in A'$ tel que $y = f(x) = f(x')$.
Or f est injective donc $x = x' \in A \cap A'$ puis $y \in f(A \cap A')$.
Inversement supposons $\forall A, A' \in \wp(E), f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$.
Soient $x, x' \in E$. Supposons $f(x) = f(x')$.
Pour $A = \{x\}$ et $A' = \{x'\}$ on a $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A') = \{f(x)\} \neq \emptyset$ donc $A \cap A' \neq \emptyset$ puis $x = x'$.

Exercice 36 : [énoncé]
a) ($\Rightarrow$) Supposons f injective. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.
On sait déjà que $A \subset f^{-1}(f(A))$.
Pour $x \in f^{-1}(f(A))$, on a $f(x) \in f(A)$ donc il existe $x' \in A$ tel que $f(x) = f(x')$.
Puisque f est injective, $x = x'$ et donc $x \in A$. Ainsi $f^{-1}(f(A)) \subset A$ puis l'égalité.
($\Leftarrow$) Supposons $\forall A \in \mathcal{P}(E), A = f^{-1}(f(A))$. Soient $x, x' \in A$.
Si $f(x) = f(x')$. Considérons $A = \{x\}$. On a $f(A) = \{f(x)\}$ donc $x' \in f^{-1}(f(A)) = A$ d'où $x = x'$.
Ainsi f injective.
b) ($\Rightarrow$) Supposons f surjective. Soit $B \in \mathcal{P}(F)$.
On sait déjà $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
Soit $y \in B$. Puisque f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$.
Puisque $f(x) \in B$, on a $x \in f^{-1}(B)$ et donc $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$. Ainsi $B \subset f(f^{-1}(B))$ puis l'égalité.
($\Leftarrow$) Supposons $\forall B \in \mathcal{P}(F), f(f^{-1}(B)) = B$.
Soit $y \in F$. Pour $B = \{y\}$, on a $f(f^{-1}(\{y\})) = \{y\}$ donc $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$. Par suite f est surjective.

Exercice 37 : [énoncé]
($\Rightarrow$) Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Soit $y \in f(C_E A)$, il existe $x \in C_E A$ tel que $y = f(x)$.
Pour tout $y' \in f(A)$, il existe $x' \in A$ tel que $y' = f(x')$, or $x' \in A$ et $x \notin A$ donc $x \neq x'$ et f étant injective $y = f(x) \neq f(x') = y'$. Par suite $y \in C_F f(A)$. Ainsi $f(C_E A) \subset C_F f(A)$.
Inversement. Soit $y \in C_F f(A)$, comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
Or $y \notin f(A)$ donc $x \notin A$ i.e. $x \in C_E A$ puis $y = f(x) \in f(C_E A)$. Ainsi $C_F f(A) \subset f(C_E A)$.
($\Leftarrow$) Montrons que f est injective. Soient $x, x' \in E$.
Si $x \neq x'$ alors pour $A = \{x\}$ on a $x' \in C_E A$ puis
$f(x') \in f(C_E A) = C_F f(A) = C_F \{f(x)\}$ i.e. $f(x) \neq f(x')$.
Montrons que f est surjective.
Pour $A = E$ on a
$\mathrm{Im} f = f(E) = C_F(C_F f(E)) = C_F(f(C_E E)) = C_F f(\emptyset) = C_F \emptyset = F$.
Finalement f est bijective.

Exercice 38 : [énoncé]
Soit $x > 0$, on a $x = x^n$ pour $n = 1 \in \mathbb{N}$ donc $x \preccurlyeq x$. La relation $\preccurlyeq$ est réflexive.
Soient $x, y > 0$, si $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq x$ alors il existe $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $y = x^n$ et $x = y^m$.
On a alors $x = x^{nm}$ donc $\ln x = nm \ln x$
Si $x = 1$ alors $y = x^n = 1 = x$.
Si $x \neq 1$ alors $\ln x \neq 0$ puis $1 = nm$. Or $n, m \in \mathbb{N}$ donc $n = m = 1$ puis $x = y$.
Finalement la relation $\preccurlyeq$ est antisymétrique.
Soient $x, y, z > 0$. Si $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq z$ alors $\exists n, m \in \mathbb{N}$ tels que $y = x^n$ et $z = y^m$.
On a $z = x^{mn}$ avec $mn \in \mathbb{N}$ donc $x \preccurlyeq z$. La relation $\preccurlyeq$ est transitive.
Finalement $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre.
Cet ordre n'est pas total car, par exemple, 2 et 3 ne sont pas comparables.

Exercice 39 : [énoncé]
$\preccurlyeq$ est clairement réflexive et transitive.
Si $(x, y) \preccurlyeq (x', y')$ et $(x', y') \preccurlyeq (x, y)$ alors $(x, y) = (x', y')$ ou $x \leqslant y \leqslant x' \leqslant y' \leqslant x$ et donc $(x, y) = (x, x) = (x', y')$.

Exercice 40 : [énoncé]
$\preccurlyeq$ est clairement réflexive.
Si $z \preccurlyeq z'$ et $z' \preccurlyeq z$ alors nécessairement $|z| = |z'|$ et $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z')$ donc $z = z'$ car $\mathrm{Im}(z), \mathrm{Im}(z') \geqslant 0$.
Si $z \preccurlyeq z'$ et $z' \preccurlyeq z''$ alors si $|z| < |z''|$ alors $z \preccurlyeq z''$ et sinon $|z| = |z'| = |z''|$ et donc $\mathrm{Re}(z) \leqslant \mathrm{Re}(z') \leqslant \mathrm{Re}(z'')$ ce qui permet à nouveau d'affirmer $z \preccurlyeq z''$.
Pour $z, z' \in \{z \in \mathbb{C} / \mathrm{Im} z \geqslant 0\}$.
Si $|z| < |z'|$ alors $z \preccurlyeq z'$
Si $|z| > |z'|$ alors $z' \preccurlyeq z$.
Si $|z| = |z'|$ alors dans le cas où $\mathrm{Re}(z) \leqslant \mathrm{Re}(z')$ on a $z \preccurlyeq z'$ et, dans le cas complémentaire, on a $z' \preccurlyeq z$.
Dans tout les cas z et z' sont comparables, la relation d'ordre est totale.

Exercice 41 : [énoncé]
La relation est clairement réflexive.

Si $(I,f) \preccurlyeq (J,g)$ et $(J,g) \preccurlyeq (I,f)$ alors $I \subset J$, $J \subset I$ et $g_{|I} = f$ donc $I = J$ et $f = g$.
Si $(I,f) \preccurlyeq (J,g)$ et $(J,g) \preccurlyeq (K,h)$ alors $I \subset J \subset K$ et $h_{\restriction I} = (h_{\restriction J})_{\restriction I} = g_{\restriction I} = f$ donc $(I,f) \preccurlyeq (K,h)$.
Finalement $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre.

Exercice 42 : [énoncé]
Soit $x \in E$. On a $f(x) \leqslant f(x)$ donc $x \preccurlyeq x$.
Soient $x,y \in E$. Si $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq x$ alors $f(x) \leqslant f(y)$ et $f(y) \leqslant f(x)$ donc $f(x) = f(y)$. Or f est injective donc $x = y$.
Soient $x,y,z \in E$. Si $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq z$ alors $f(x) \leqslant f(y)$ et $f(y) \leqslant f(z)$ donc $f(x) \leqslant f(z)$ puis $x \preccurlyeq z$
Finalement, $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre.

Exercice 43 : [énoncé]
Si l'ordre est total $A \cup B$ possède un plus grand élément :
$\max(A \cup B) = \max(\max(A), \max(B))$.
Si l'ordre n'est pas total, les plus grands éléments de A et de B peuvent ne pas être comparés aux éléments de A et B. Dans $(\mathbb{N}^\star, |)$, pour $A = \{2,4\}$ et $B = \{3,9\}$, A et B ont un plus grand élément alors que $A \cup B$ n'en a pas.
$A \cap B$ peut ne pas posséder de plus grand élément, cet ensemble peut notamment être vide.

Exercice 44 : [énoncé]
Par l'absurde supposons E infini.
Posons $x_0 = \min E$, $x_1 = \min E \setminus \{x_0\}$,..., $x_n = \min E \setminus \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$,...
L'ensemble $\{x_0, \ldots, x_n, \ldots\}$ n'a pas de plus grand élément. Absurde.

Exercice 45 : [énoncé]
a) Pour tout $1 \leqslant m \leqslant p$,
$$a_{i,m} \leqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant p} a_{i,j}$$
donc
$$\min_{1 \leqslant i \leqslant n} a_{i,m} \leqslant \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \max_{1 \leqslant j \leqslant p} a_{i,j}$$
puis
$$\max_{1 \leqslant m \leqslant p} \min_{1 \leqslant i \leqslant n} a_{i,m} \leqslant \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \max_{1 \leqslant j \leqslant p} a_{i,j}$$
b) Pour le tableau $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
$$\max_{1 \leqslant j \leqslant 2} \min_{1 \leqslant i \leqslant 2} a_{i,j} = 2 \text{ et } \min_{1 \leqslant i \leqslant 2} \max_{1 \leqslant j \leqslant 2} a_{i,j} = 3$$

Exercice 46 : [énoncé]
Si $E = \emptyset$ alors $f(E) = \emptyset$ et l'égalité proposée est vraie.
Sinon, on peut écrire $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$ avec des x_i deux à deux distincts et $n = \text{Card}E$.
$f(E) = \{f(x_1), \ldots, f(x_n)\}$, or f est injective, les $f(x_i)$ sont deux à deux distincts donc $\text{Card}(f(E)) = n$.

Exercice 47 : [énoncé]
$\text{Card}(A \cup B \cup C) = \text{Card}A + \text{Card}B \cup C - \text{Card}(A \cap B) \cup (A \cap C)$ donc
$\text{Card}(A \cup B \cup C) =$
$\text{Card}A + \text{Card}B + \text{Card}C - \text{Card}B \cap C - \text{Card}A \cap B - \text{Card}C \cap A + \text{Card}A \cap B \cap C$

Exercice 48 : [énoncé]
a) oui, car si $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$ alors $f(A) = \{f(x_1), \ldots, f(x_n)\}$ est fini.
b) non, il suffit de considérer une fonction constante définie sur un ensemble infini.
c) non, il suffit de considérer une fonction constante définie sur un ensemble infini.
d) non, il suffit de considérer une partie B formée par une infinité de valeurs non prises par f.

Exercice 49 : [énoncé]
Si E est l'ensemble vide, il n'existe pas de partie A incluse dans E vérifiant $A \neq \emptyset$ et $A \neq E$.
Si E est un ensemble à un élément, idem.
Si E est un ensemble fini contenant au moins deux éléments, on peut indexer les éléments de E pour écrire $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ avec $n = \text{Card}E \geqslant 2$. Considérons alors l'application $f : E \to E$ définie par $f(x_1) = x_2$, $f(x_2) = x_3$,...,$f(x_{n-1}) = x_n$ et $f(x_n) = x_1$.
Soit une partie A de E vérifiant $f(A) \subset A$. Si A est non vide alors il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $x_i \in A$ mais alors $f(x_i) \in A$ i.e. $x_{i+1} \in A$ et reprenant ce processus on obtient $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_{i-1} \in A$ et donc $A = E$.
Ainsi, si E est un ensemble fini, il existe une application $f : E \to E$ pour laquelle les seules parties A de E vérifiant $f(A) \subset A$ sont $\emptyset$ et E.

Inversement.
Soit E un ensemble infini et $f : E \to E$.
Soit $x \in E$ et considérons la suite des éléments $x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x), \dots$.
S'il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $f^n(x) = x$ alors la partie
$A = \{x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\} \subset E$ est non vide, distincte de E (car A finie) et vérifie $f(A) \subset A$.
Sinon, la partie $A = \{f(x), f^2(x), \dots\} = \{f^n(x)/n \in \mathbb{N}^\star\} \subset E$ est non vide, distincte de E (car $x \notin A$) et vérifie $f(A) \subset A$.

Exercice 50 : [énoncé]
Si $n > p$, il n'y a pas d'injections possibles.
Si $n = 0$, il y a une injection : l'application vide.
Si $0 < n \leqslant p$ alors on peut écrire $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ avec les x_i deux à deux distincts.
Pour former une injection de E dans F :
On choisit $f(x_1)$ dans F : p choix.
On choisit $f(x_2)$ dans $F \setminus \{f(x_1)\}$: $p - 1$ choix.
...
On choisit $f(x_n)$ dans $F \setminus \{f(x_1), \dots, f(x_{n-1})\}$: $p - n + 1$ choix.
Au total, il y a $p \times (p-1) \times \dots \times (p-n+1) = \frac{p!}{(p-n)!}$ choix.

Exercice 51 : [énoncé]
Une application $f : E \to F$ strictement croissante est entièrement déterminée par son image qui est une partie formée de n éléments de F. Il y a $\binom{p}{n}$ parties à n éléments dans F et donc autant d'applications strictement croissantes de E vers F.

Exercice 52 : [énoncé]
Une relation d'ordre total sur E permet de définir une bijection de $\{1, \dots, n\}$ vers E et inversement.
Par suite, il y a exactement $n!$ relations d'ordre total possibles.

Exercice 53 : [énoncé]
Notons t_n le nombre de triangles formés.

$$t_0 = t_1 = t_2 = 0$$

Pour $n \geqslant 3$, former un triangle revient à choisir les trois droites définissant ses côtés :

$$\text{il y a } \binom{n}{3} \text{ possibilités}$$

Chacune de ses possibilités définit un véritables triangle (car il y a ni concourance, ni parallélisme) et les triangles obtenus sont deux à deux distincts. Finalement

$$t_n = \binom{n}{3}$$

Exercice 54 : [énoncé]
Soit E un ensemble à $p + q$ éléments séparé en deux parties disjointes E' et E'' de cardinaux p et q.
Il y a exactement $\binom{p+q}{n}$ parties à n éléments dans E.
Or pour former une partie à n élément de E, on peut pour chaque $k \in [\![0, n]\!]$ commencer par choisir k éléments dans E' avant d'en choisir $n - k$ dans E''. Il y a $\binom{p}{k}\binom{q}{n-k}$ possibilités pour chaque $k \in [\![0, n]\!]$ puis au total $\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k}$ possibilités d'où l'identité.

Exercice 55 : [énoncé]
a) Si F est un singleton, il n'y a qu'une application à valeurs dans F et celle-ci est surjective. $S_n^1 = 1$.
Si $\text{Card}E = \text{Card}F < +\infty$ alors les surjections de E sur F sont aussi les bijections. Par suite $S_n^n = n!$.
Si $\text{Card}E < \text{Card}F$, il n'existe pas de surjections de E sur F. Ainsi $S_n^p = 0$.
b) Une surjection de E sur F telle que sa restriction à $E \setminus \{a\}$ soit surjective peut prendre n'importe quelle valeurs en a. Il y en a pS_{n-1}^p.
Une surjection de E sur F telle que sa restriction à $E \setminus \{a\}$ ne soit pas surjective doit prendre en a la valeur manquante. Il y a p possibilité pour choisir la valeur en a et S_{n-1}^{p-1} surjections de $E \setminus \{a\}$ sur $F \setminus \{f(a)\}$. Au total, il y en a pS_{n-1}^{p-1}.
Au final

$$S_n^p = p(S_{n-1}^{p-1} + S_{n-1}^p)$$

c) Montrons la propriété par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^\star$.
Pour $n = 1$

Si $p = 1$

$$S_1^1 = 1 \text{ et } \sum_{k=0}^{1} (-1)^{1-k} \binom{1}{k} k = 1$$

Si $p > 1$

$$S_1^p = 0 \text{ et } \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k} p \binom{p-1}{k-1} = -p(1-1)^{p-1} = 0$$

car

$$\binom{p}{k} = \frac{p}{k} \binom{p-1}{k-1}$$

Supposons la propriété établie au rang $n - 1 \geqslant 1$.
Pour $p = 1$

$$S_n^1 = 1 \text{ et } \sum_{k=0}^{1} (-1)^{1-k} \binom{1}{k} k = 1$$

Pour $p > 1$

$$S_n^p = p(S_{n-1}^{p-1} + S_{n-1}^p) = p \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{p-1-k} \binom{p-1}{k} k^{n-1} + p \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^{n-1}$$

En combinant les deux sommes en exploitant la formule de Pascal

$$S_n^p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} p \binom{p-1}{k-1} k^{n-1}$$

puis en exploitant

$$p \binom{p-1}{k-1} = k \binom{p}{k}$$

on parvient à

$$S_n^p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n$$

Récurrence établie.

Exercice 56 : [énoncé]
a) $\Sigma_n^0 = 1$: seul le n-uplet nul est de somme égale à 0.
$\Sigma_n^1 = n$: les n-uplets de somme égale à 1 sont formés d'un 1 et de $n - 1$ zéros.
$\Sigma_n^2 = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$: les n-uplets de somme égale à 2 sont ou bien formé de 1 deux et de $n - 1$ zéros, ou bien de 2 uns et de $n - 2$ zéros.
$\Sigma_1^p = 1$: seul le 1-uplet (p) est de somme égale à p.
$\Sigma_2^p = p + 1$: les couples de somme égale à p sont $(0, p), (1, p), \ldots, (p, 0)$.
b) Le nombre de $n + 1$ uplets $(x_1, ..., x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{N}^n$ tels que $x_1 + \cdots + x_{n+1} = p$ avec $x_{n+1} = k \in [\![0, p]\!]$ est Σ_n^{p-k}.
Donc

$$\Sigma_{n+1}^p = \Sigma_n^0 + \Sigma_n^1 + \cdots + \Sigma_n^p$$

c) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^\star$, montrons

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \Sigma_n^p = \binom{n+p-1}{p}$$

Pour $n = 1$: ok
Supposons la propriété établie au rang $n \geqslant 1$

$$\forall p \in \mathbb{N}, \Sigma_{n+1}^p = \Sigma_n^0 + \cdots + \Sigma_n^n = \binom{n-1}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n+p-1}{p} = \binom{n+p}{p}$$

Récurrence établie.

Exercice 57 : [énoncé]
a) Autant que de parties de $E \backslash X$: 2^{n-p}
b) $\sum\limits_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 2^{n-p} = (1+2)^n = 3^n$.

Exercice 58 : [énoncé]
Pour $k \in \{0, \ldots, n\}$, il y a $\binom{n}{k}$ parties Y à un k éléments dans E.
Pour une telle partie Y, il y a 2^k parties X incluses dans Y.
Au total, il y a $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = (1+2)^n = 3^n$ couples $(X, Y) \in \wp(E)^2$ tels que $X \subset Y$.

Exercice 59 : [énoncé]

a) Autant que de parties de $E\backslash A$: 2^{n-p}

b) Autant que de parties de $E\backslash A$ à $m-p$ éléments : $\binom{n-p}{m-p}$.

c) Une fois X à m éléments contenant A déterminé il y a 2^{n-m} choix de Y possibles et donc

$\sum_{m=p}^{n}\binom{n-p}{m-p}2^{n-m}=\sum_{k=0}^{n-p}\binom{n-p}{k}2^{n-p-k}=(1+2)^{n-p}=3^{n-p}$.

Exercice 60 : [énoncé]

Pour $k\in\{0,\dots,n\}$, il y a $\binom{n}{k}$ parties X à un k éléments dans E.

Par suite

$$\sum_{X\subset E}\operatorname{Card}(X)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{\operatorname{Card}(X)=k}k=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}=n2^{n-1}$$

Pour $k\in\{0,\dots,n\}$, il y a $\binom{n}{k}$ parties Z à k éléments dans E.

Pour une telle partie Z, les parties X contenant Z ont $\ell\in\{k,\dots,n\}$ éléments.

Il y a $\binom{n-k}{\ell-k}$ parties X à ℓ éléments contenant Z.

Pour une telle partie X, une partie Y telle que $X\cap Y=Z$ est une partie Y déterminée par $Z\subset Y\subset Z\cup C_EX$. Il y a $2^{n-\ell}$ parties Y possibles.

Il y a

$$\sum_{\ell=k}^{n}\binom{n-k}{\ell-k}2^{n-\ell}=(1+2)^{n-k}=3^{n-k}$$

couples (X,Y) tels que $X\cap Y=Z$.

Par suite

$$\sum_{X,Y\subset E}\operatorname{Card}(X\cap Y)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{\operatorname{Card}Z=k}\sum_{X\cap Y=Z}\operatorname{Card}(X\cap Y)=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}3^{n-k}$$

Or

$$((3+x)^n)'=n(3+x)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}3^{n-k}x^{k-1}$$

donc

$$\sum_{X,Y\subset E}\operatorname{Card}(X\cap Y)=n4^{n-1}$$

Exercice 61 : [énoncé]

Une injection f de $\mathbb{N}_p$ dans $\mathbb{N}_n$ permet de définir le p-cycle $(f(1)\dots f(p))$.

Inversement, un p-cycle de $\mathbb{N}_n$ peut être définis par exactement p injections différentes.

En vertu du principe des bergers, il y a exactement $\frac{n!}{p(n-p)!}$ p-cycles dans $\mathcal{S}_n$.

Exercice 62 : [énoncé]

a) Une suite $(x_1,\dots,x_p)$ strictement croissante est entièrement déterminée par le choix de p éléments distincts dans E (qu'il suffit alors d'ordonner). Il y a donc autant de suites strictement croissantes que de parties à p éléments dans un ensemble à n éléments, soit

$$\binom{n}{p}$$

b) Associons à une suite $(x_1,\dots,x_p)$ d'éléments de E la suite $(y_1,\dots,y_p)$ définie par

$$y_k=x_k+(k-1)$$

Par cette correspondance bijective, on peut associer à une suite croissante d'éléments de E une suite strictement croissante d'éléments de $E'=\{1,\dots,n+p-1\}$ et inversement.

Le nombre de suites $(x_1,\dots,x_p)$ croissantes d'éléments de E est donc

$$\binom{n+p-1}{p}$$

c) A chaque suite $(a_1,\dots,a_p)$ on fait correspondre la suite $(x_1,\dots,x_p)$ avec

$$x_k=a_1+\dots+a_k$$

Par cette correspondance bijective, on associe les suites $(a_1,\dots,a_p)$ vérifiant $a_1+\dots+a_p\leqslant n$ aux suites croissantes d'éléments de $E=\{0,1,\dots,n\}$.

Le nombre de suites cherché est donc

$$\binom{n+p}{p}$$

d) La condition $a_1+\dots+a_p=n$ est remplie si $a_1+\dots+a_p\leqslant n$, mais pas $a_1+\dots+a_p\leqslant n-1$.

Le nombre de suites cherché est donc

$$\binom{n+p}{p}-\binom{n+p-1}{p}=\binom{n+p-1}{p-1}=\binom{n+p-1}{n}$$

Exercice 63 : [énoncé]

a) Dans le développement de

$$(a+b+c)^{10} = (a+b+c)(a+b+c)\dots(a+b+c)$$

on obtient un terme $a^2b^5c^3$ en choisissant deux a, cinq b et trois c.

Il y a $\binom{10}{2}$ choix possibles pour les facteurs dont seront issus les a.

Une fois ceux-ci choisis, il y a $\binom{8}{5}$ choix possibles pour les facteurs fournissant les b.

Une fois ces choix faits, les trois facteurs restant fournissent les c.

Au total, il y a

$$\binom{10}{2}\binom{8}{5} = \frac{10!}{2!5!3!} = 2520$$

termes $a^2b^5c^3$ apparaissant lors du développement de $(a+b+c)^{10}$.

b) On reprend le même protocole, pour obtenir

$$\frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_p!}$$

si $k_1+k_2+\dots+k_p = n$ et 0 sinon.

Exercice 64 : [énoncé]

a) Le nombre de -1 est de $n-p$ et donc $s_n = s_0 + p - (n-p) = s_0 + 2p - n$.

b) Si $m-(s_0+n)$ n'est pas un nombre pair, il n'y a pas de chemin solutions.

Sinon, on introduit $p\in\mathbb{Z}$ pour lequel $m - s_0 + n = 2p$.

Si $p<0$ ou $p>n$, on ne pourra trouver de chemin solutions.

Si $0\leqslant p\leqslant n$, chemins solutions correspondent aux suites x pour lesquels on positionne p termes 1 et les autres égaux à -1. Il y a $\binom{n}{p}$ positions possibles pour les termes 1 et autant de chemins solutions.

c) Tout chemin joignant $(0,s_0)$ à (n,m) et coupant l'axe des abscisses peut être associé de façon bijective à un chemin joignant $(0,-s_0)$ à (n,m), il suffit pour cela de passer à l'opposer les termes $x_1,x_2,\dots$ jusqu'au premier pour lequel $s_0+x_1+\dots+x_k = 0$ et ne pas modifier les autres comme dans la figure proposé (ce résultat est connu sous le nom de principe de réflexion).

d) Si $m-1+n$ est impair, il n'y a aucun chemins possible d'aucune sorte.

Sinon, on peut écrire $m-1+n = 2p$ avec $p\in\mathbb{Z}$ et il y a alors $\binom{n}{p}$ chemins possibles (ce nombre étant nul lorsque $p<0$ ou $p>n$).

Parmi ceux-ci, on retire ceux coupant l'axe abscisse qui par l'étude au dessus sont au nombre de $\binom{n}{p+1}$.

Finalement, il y a

$$\binom{n}{p} - \binom{n}{p+1}$$

chemins solutions

Exercice 65 : [énoncé]

a) Pour $A\subset [\![1,n]\!]$, notons

$$\mathcal{S}_A = \{\sigma\in\mathcal{S}_n/\forall x\in A, \sigma(x)=x \text{ et } \forall x\notin A, \sigma(x)\neq x\}$$

$\mathcal{S}_n$ est la réunion disjointes des $\mathcal{S}_A$ pour A parcourant $\mathcal{P}([\![1,n]\!])$.

Après indexation des éléments de A, une application de $\mathcal{S}_A$ peut être identifiée à un dérangement de $[\![1,n-k]\!]$ avec $k = \mathrm{Card}A$.

On en déduit $\mathrm{Card}\mathcal{S}_A = d_{n-k}$ puis

$$\mathrm{Card}\mathcal{S}_n = \sum_{A\subset\mathcal{P}(E)} d_{n-\mathrm{Card}A} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} d_{n-k}$$

b) Raisonnons par récurrence forte sur n.

La propriété énoncé est vrai aux rangs 0 et 1.

Supposons la propriété vraie jusqu'au rang $n-1$.

Pour $k\in[\![0,n]\!]$, posons

$$d'_k = \sum_{\ell=0}^{k}(-1)^{k-\ell}\binom{k}{\ell}\ell!$$

Par hypothèse de récurrence $d_k = d'_k$ pour $k\in[\![0,n-1]\!]$ et on veut établir l'identité pour $k=n$.

Or

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}d'_{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}d'_k = \sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{k}(-1)^{\ell-k}\binom{n}{k}\binom{k}{\ell}\ell!$$

Par échange des deux sommes

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}d'_{n-k} = \sum_{\ell=0}^{n}\sum_{k=\ell}^{n}(-1)^{\ell-k}\binom{n}{k}\binom{k}{\ell}\ell!$$

puis glissement d'indice dans la deuxième somme

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}d'_{n-k}=\sum_{\ell=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-\ell}(-1)^k\binom{n}{k+\ell}\binom{k+\ell}{\ell}\ell!$$

et expression factorielle des coefficients binomiaux

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}d'_{n-k}=\sum_{\ell=0}^{n}\frac{n!}{(n-\ell)!}\sum_{k=0}^{n-\ell}(-1)^k\binom{n-\ell}{k}$$

Or

$$\sum_{k=0}^{n-\ell}(-1)^k\binom{n-\ell}{k}=(1+(-1))^{n-\ell}=\begin{cases}0 & \text{si } n-\ell>0\\ 1 & \text{si } n=\ell\end{cases}$$

donc

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}d'_{n-k}=n!=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}d_{n-k}$$

On en déduit $d'_n=d_n$ puisque l'hypothèse de récurrence a fourni les identifications $d_k=d'_k$ pour $k\in[\![0,n-1]\!]$.
Récurrence établie.

Exercice 66 : [énoncé]
a) La somme étudiée dénombre les permutations de $[\![1,n]\!]$ selon leur nombre de points fixes

$$\sum_{k=0}^{n}s_n(k)=\mathrm{Card}\mathcal{S}_n=n!$$

b) Pour chaque permutation de s de $\mathcal{S}_n(k)$ il y a k points fixes x possibles. Le nombre de couples cherché est donc $ks_n(k)$.
Pour chaque $x\in[\![1,n]\!]$, une permutation possédant k points fixes (dont x) est entièrement déterminée par sa restriction à $[\![1,n]\!]\setminus\{x\}$ qui est une permutation à $k-1$ points fixes. Ainsi, le nombre de couples cherché est aussi $ns_{n-1}(k-1)$.
c) En itérant la formule ci-dessus obtenue

$$s_n(k)=\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots1}s_{n-k}(0)=\binom{n}{k}s_{n-k}(0)$$

d) Pour déterminer une permutation élément de $\mathcal{S}_n(k)$, on choisit l'ensemble de ses k points fixes (il y a $\binom{n}{k}$ possibilités) et on construit ses valeurs sur le complémentaire de l'ensemble des points fixes à partir d'une permutation de $n-k$ éléments sans points fixes (il y a $s_{n-k}(0)$ possibilités). Au total, il y a

$$\binom{n}{k}s_{n-k}(0)$$

applications de la forme voulue.